

QUELQUES PROBLEMES D'INTERSECTIONS EN GEOMETRIE RIEMANNIENNE

PIERRE MARRY & JEAN-LOUIS VERDIER

Cet article constitue essentiellement un travail de mise au point. On y exploite systématiquement certaines idées de S. S. Chern (cf. [6]). Quelques progrès ont été faits dans la présentation des calculs, certaines formes différentielles introduites par Chern apparaissant naturellement comme intégrales sur les fibres d'un fibré en sphères de formes classiques. Ces calculs se rattachent à ceux de certains caractères différentiels.

Les auteurs se sont beaucoup inspiré du travail fondamental de R. Bott et S. S. Chern (cf. [3]) qui traite de problèmes analogues en géométrie C -analytique.

1. Élément d'aire relatif

1.1. Courant de Dirac. Soient X une variété différentielle C^∞ de dimension n , Y une sous-variété de X de dimension $p < n$, T_X le faisceau d'orientation de X et $i: Y \rightarrow X$ l'injection canonique. Soit T un faisceau localement libre de rang 1 sur X , égal à son inverse, induisant sur Y le faisceau d'orientation de Y .

A toute p -forme différentielle T -tordue à support compact α sur X , le courant de Dirac δ_Y de Y associe le nombre réel $\langle \delta_Y, \alpha \rangle = \int_Y i^*(\alpha)$.

Si α est fermée, ce nombre ne dépend que de la classe de cohomologie à support compact de α , donc δ_Y détermine un élément de $\text{Hom}(H_c^p(X, T), \mathbf{R})$. La dualité de Poincaré nous donne un isomorphisme $\text{Hom}(H_c^p(X, T), \mathbf{R}) \approx \text{Ext}^{n-p}(T, T_X)$ et, comme T est localement libre, on a un isomorphisme

$$\text{Ext}^{n-p}(T, T_X) \approx H^{n-p}(X, \text{Hom}(T, T_X)) = H^{n-p}(X, T \otimes T_X).$$

L'image de δ_Y dans $H^{n-p}(X, T \otimes T_X)$ est la *classe fondamentale* $[Y]$ de Y dans X (par rapport à T). Elle provient en fait d'un élément de $H_Y^{n-p}(X, T \otimes T_X)$ par le morphisme canonique $H_Y^{n-p}(X, T \otimes T_X) \rightarrow H^{n-p}(X, T \otimes T_X)$.

Si V est un voisinage ouvert quelconque de Y dans X , $[Y]$ a donc des représentants qui sont des formes différentielles fermées, à support dans V , et $T \otimes T_X$ -tordues.