J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
10 (1975) 289-345

INVARIANTS DIFFERENTIELS D'UN PSEUDOGROUPE DE LIE. I

A. KUMPERA

Dans deux mémoires célèbres [41], [42] Sophus Lie a esquissé une théorie générale d'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles arbitraires, ses méthodes étant basées sur la structure du pseudogroupe des transformations locales qui laissent invariante l'équation donnée. Toute l'oeuvre de Sophus Lie est en fait dominée par le problème fondamental de l'intégration des équations différentielles, [44]. Très tôt Lie s'apperçoit que la plupart des équations pour lesquelles ont été développées des méthodes d'intégration jouissaient en commun d'une propriété fondamentale, celle d'être invariantes par les opérations d'un groupe ou groupe local de transformations, l'intégration de ces équations étant étroitement liée à la structure de ce groupe. C'est à propos des équations dont la solution générale ne dépend que d'un nombre fini de paramètres que Lie introduit la notion de groupe fini et continu à n paramètres, [39]. L'introduction des groupes continus infinis est motivée par les équations dont la solution générale dépend de fonctions arbitraires d'un certain nombre de variables. Non seulement il unifie et généralise les diverses méthodes d'intégration, [44], mais développe ensuite, après quinze ans de recherches, la théorie générale d'intégration qui s'appuie sur la structure des groupes continus finis ou infinis (pseudogroupes de Lie).

Soit Φ une équation différentielle invariante par l'action d'un pseudogroupe de transformations locales Γ (en générale non transitif) et donnons nous une suite normale

$$\mathrm{Id} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_n = \Gamma \tag{1}$$

de sous-pseudogroupes de Γ. Dans ces conditions, Lie ramène le problème de l'intégration de Φ à celui de l'intégration de $n+1$ équations différentielles auxiliaires Φ_i parmi lesquelles les n premières sont invariantes par l'action des pseudogroupes quotients Γ_{i+1}/Γ_i et sont automorphes, c'est-à-dire, l'intransitivité de l'action du pseudogroupe est en un sens minimale. Or, l'intégration de Γ sera accomplie par une méthode récurrente en intégrant de proche en proche les équations Φ_i. Si Φ est intégrable il en est de même de tous les Φ_i

Communicated by D. C. Spencer, January 12, 1974. Ce travail a été subventionné en partie par le Consiglio Nazionale delle Ricerche (Italie), le Conseil National de Recherches du Canada, octroi A-5604, et le Ministère de l'Education du Québec.