J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 141-168

TOPOLOGIE FAIBLE SUR DES VARIÉTÉS DE BANACH. APPLICATION AUX GÉODÉSIQUES DES VARIÉTÉS DE SOBOLEV

JEAN-PAUL PENOT

L'idée de munir d'une topologie faible certaines variétés de Banach, les variétés fonctionnelles notamment, n'est pas nouvelle. L'importance de cette topologie pour l'analyse non-linéaire (cf. J. L. Lions [12]) plaide en ce sens. C'est à R. S. Palais que l'on doit d'avoir mis en lumière dans son intervention au Congrès de Nice [16] la clarification qu'apporterait l'introduction d'une topologie faible dans les variétés fonctionnelles. Ainsi les ensembles intrinséquement bornés de K. Uhlenbeck [20] sont les parties relativement compactes de la variété de Sobolev $W_p^k(\pi)$ pour la topologie faible introduite dans cet article et on a l'analogue du théorème classique: les sous-ensembles bornés de $W_p^k(\pi)$ pour sa métrique canonique sont les parties relativement compactes pour la topologie faible. Bien entendu la topologie faible coïncide avec la topologie forte dans toute variété de dimension finie.

Il est facile de voir qu'on ne peut espérer transporter la topologie faible usuelle des modèles au moyen des cartes canoniques de la variété $W_p^k(\pi)$ (ou plus généralement d'une variété fonctionnelle $\mathscr{F}(\pi)$ où $\pi\colon P \to M$ est une submersion de base compacte). En effet l'image d'une telle carte est l'ensemble $\mathscr{F}(M, U)$ des sections de classe $\mathscr{F}$ d'un fibré vectoriel $\xi\colon V \to M$ à valeurs dans un ouvert U de V et cet ensemble n'est pas ouvert dans l'espace de Banach $\mathscr{F}(M, V)$ pour sa topologie faible. En effet, si $U_m = \xi^{-1}(m) \cap U$ est borné dans $V_m = \xi^{-1}(m)$ pour tout $m \in M$ l'ensemble $\mathscr{F}(M, U)$ ne peut contenir une droite affine. De plus les changements de cartes qui sont de la forme $s \to g \circ s$ où $g\colon U \to V'$ est une application fibrée de U dans un autre fibré vectoriel $\xi' = (V', \xi', M)$ ne sont pas continus pour les topologies faibles sur $\mathscr{F}(M, V)$ et $\mathscr{F}(M, V')$, pour une raison analogue.

La topologie faible σ d'un espace de Banach doit donc être renforcée pour remédier à ces inconvénients. Plusieurs solutions sont possibles (§ 1); celle qui est adoptée ici est le choix de la topologie séquentielle σ_s associée à σ. Un autre choix (la topologie σ_b du § 1) est adopté par R. Graff [8]. L'observation que les changements de cartes de $W_p^k(\pi)$ sont continus pour σ_s et σ_b a été communiquée par J. Dowling et K. Uhlenbeck à R. Palais. U. Koschorke s'est intéressé à des questions voisines [11].

Communicated by A. Lichnerowicz, October 7, 1972.