Un Théorème D'unicité Pour les Distributions Sphériques sur L'espace Tangent à un Espace Symétrique

By Charles TOROSSIAN

DMi, VRA 762 du CNRS, Ecole Normale Supérieure, France

(Communicated by Kiyosi ITÔ, M. J. A., Dec. 12, 1996)

Résumé: Nous montrons, qu'il n'existe pas de distributions sphériques singulières, sur l'espace tangent à un espace symétrique, lorsque le paramètre est régulier.

1. Introduction—Rappels. Soit G un groupe de Lie semi-simple à centre fini, σ un automorphisme involutif de G et H la composante connexe des points fixes de σ. L'espace G/H est alors un espace symétrique semi-simple. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition en espaces propres relativement à σ (on note par abus σ pour la différentielle de σ à l'origine). On considère un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{q}$ (il y un nombre fini de classes de conjugaison sous H de tels sous-espaces, mais ils ont tous la même dimension appelée rang de G/H) et W le groupe de Weyl. La restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{q}$ est non dégénérée, ainsi que sa restriction à $\mathfrak{a}$, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{a}^*$ (le dual) à un sous-espace de $\mathfrak{q}^*$.

Soit T une indéterminée et considérons le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $\mathfrak{q}$, $ad^2(X)$ (pour $X \in \mathfrak{q}$)

$$det(T - ad^2(X)_{\mathfrak{q}}) = T^n + \dots + R(X)T^r$$

où n désigne la dimension de $\mathfrak{q}$ et r le rang de l'espace symétrique. La fonction polynomiale R est évidemment H-invariante. Un élément $X \in \mathfrak{q}$ sera dit générique si on a $R(X) \neq 0$ et régulier si la dimension du centralisateur dans $\mathfrak{h}$ de X est minimale parmi les éléments de $\mathfrak{q}$ (cette notion s'étend bien-sûr pour les éléments de $\mathfrak{q}_C$). On sait d'après Kostant-Rallis [3] que les éléments génériques sont semi-simples et réguliers, ils forment un ouvert dense dans $\mathfrak{q}$ que l'on notera $\mathfrak{q}_{rs}$.

On note $S[\mathfrak{q}_C]$ l'algèbre symétrique complexe de $\mathfrak{q}$ et $S[\mathfrak{q}_C]^H$ celle des invariants. Cette dernière s'identifie aux opérateurs différentiels H-invariants à coefficients constants sur $\mathfrak{q}$. D'après Chevalley l'algèbre $S[\mathfrak{q}_C]^H$ est isomorphe à l'algèbre $S[\mathfrak{a}_C]^W$ qui est une algèbre de polynômes à r générateurs. Les caractères sont donc donnés par l'évaluation en une forme $\Lambda \in \mathfrak{a}_C^*$.

Une distribution u sur $\mathfrak{q}$ est dite sphérique si elle est H invariante et solution propre des équations defférentielles associées à $S[\mathfrak{q}_C]^H$, i.e. si elle vérifie le système

$$M_\Lambda : \partial(P)u = P(\Lambda)u.$$

Dans cette note nous nous intéressons au problème suivant (voir par exemple Sekiguchi [4]):

Problème. Existe-til des distributions sphériques dont le support est inclus dans $\mathfrak{q} - \mathfrak{q}_{rs}$. De telles distributions sont dites singulières.

Nous montrons qu'il n'existe pas de distributions singulières si le paramètre Λ est régulier, i.e. si l'élément H_Λ correspondant via la forme de Killing est régulier dans $\mathfrak{q}_C$ (ce qui est équivalent à générique, car il est semi-simple).

L'idée de ce résultat nous est venue après la lecture d' un article de Kowata [2]. Il nous semble que ce résultat est contenu implicitement dans l'article en question, mais que l'auteur n'a pas remarqué la chose.

Dans le cas des groupes Harish-Chandra montre que toute distribution sphérique est L^1_{loc} et analytique sur les éléments génériques. En particulier il n'existe pas de distributions singulières (ceci quelle que soit la valeur de Λ). Nous expliquons à la fin de cette note les conséquences de notre résultat.

2. Résultats. On garde les notations de l'introduction, et on prend $\Lambda \in \mathfrak{a}_C^*$ régulier. De tels éléments forment un ouvert de Zariski de $\mathfrak{a}_C^*$.

Proposition 1. *Soit u une distribution vérifiant $\partial(P)u = P(\Lambda)u$, pour tout $P \in S[\mathfrak{q}_C]^H$ et $Support(u) \subset S = \{X \in \mathfrak{q},\ R(X) = 0\}$. Alors on a $u = 0$.*

Preuve: Prés d'un point x du support de u, l'ordre de la distribution est finie. Comme R s'annule sur le support, il existe un entier l tel que l'on ait $R^l u = 0$. Alors u vérifie localement le sys-