78. *Sur les solutions élémentaires des opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre*

Par Mamoru SAWADA
Département de Mathématique, Faculté d'Éducation,
Université Yamanashi

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Oct. 12, 1988)

1. F. Trèves a considéré l'existence des solutions élémentaires des opérateurs aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant du paramètre [1]. Il a prouvé que l'on pouvait les choisir comme les C^∞fonctions du paramètre à valeur dans $\mathcal{D}'$. (espace des distributions) [2]

Dans cette note, nous allons prouver la même conclusion de Trèves pour les opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre.

2. Théorème. *Soit Λ une C^∞variété. $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit une suite des C^∞ fonctions en $\lambda \in \Lambda$ à valeur dans $\boldsymbol{C}$ qui ait les propriétés que pour tout λ $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty \neq \{0\}$ et pour tout opérateur différentiel D_λ sur Λ $\sum_{j=1}^\infty |D_\lambda C_j(\lambda)|$ converge localement uniformément dans Λ. Et $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit la même suite à valeur dans R^n qui ait les propriétés que pour tout λ $\{a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soient mutuellement distinctes et pour tout opérateur différentiel D_λ $\{D_\lambda a_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ soit localement uniformément bornée dans Λ. Alors les opérateurs linéaires aux différences à coefficients constants possédant les termes infinis dépendant du paramètre $\sum_{j=1}^\infty C_j(\lambda)\tau_{a_j(\lambda)}$ ont une solution élémentaire E_λ qui est une C^∞ fonction en λ à valeur dans $\mathcal{D}'$.*

Démonstration. En établissant le Lemme 3 de cette note, on peut le prouver par la même méthode que [1] dans lequel on a obtenu le Théorème 1 des Lemmes 3 et 4.

3. Lemme 1. *Soient $\{C_j\}_{j=1}^\infty \neq \{0\}$ une suite des nombres complexes qui soit absolument convergente, $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ et $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ une suite des nombres réels tel que $|\alpha_j| \leqq M$. Posons $F(\eta, z) = \sum_{j=1}^\infty C_j e^{i\eta_j} e^{i\alpha_j z}$ pour $z \in \boldsymbol{C}$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$. Alors on obtient* (1) *$F(\eta, z) \not\equiv 0$ pour tout η.*

(2) *$F(\eta, z)$ est uniformément continue en η dans un disque $\{z \,|\, |z| \leqq r\}$ pour tout $r > 0$.*

(3) *Il existe un entier $m > 0$ tel que $F(\eta, z)$ admet au plus m racines, si l'on compte chacune avec son ordre de multiplicité dans l'unité-disque $\{z \,|\, |z| \leqq 1\}$ pour tout η.*

(4) *On fixe un m de* (3). *Pour tout $\{r_k\}_{k=1}^{m+1}$; $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{m+1} < 1$, on pose $\Phi(\eta) = \mathrm{Max}_{1 \leqq k \leqq m+1} \inf_{|z| = r_k} |F(\eta, z)|$. Alors $\Phi(\eta)$ admet un minimum positif dans R^∞.*

Démonstration. (1) S'il n'était pas vrai, on pourrait faire l'hypothèse