26. *Deux résultats sur les suites limite-périodiques*

Par Jean Loup MAUCLAIRE
The Institute for Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., March 12, 1987)

1er Problème. Un résultat de Radoux ([2]) dit que, si f est continue sur $[0, 1]$, et si φ est l'indicateur d'Euler, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)\varphi(k)=\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 uf(u)du.$$

Récemment, Hlawka a repris la question et étendu ce résultat à la classe des fonctions intégrables sur [0, 1] au sens de Riemann ([1]). Cependant, il ne semble pas que l'on ait souligné le fait qu'un résultat de ce genre relève essentiellement de l'indépendance statistique. En effet, on a :

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)\varphi(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)\right)\times\frac{\varphi(k)}{k}$$

et le passage à la limite donne

$$\frac{6}{\pi^2}\int_0^1 uf(u)du.$$

Or

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)=\int_0^1 uf(u)du,$$

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{6}{\pi^2},$$

ce qui montre bien qu'il s'agit de l'indépendance statistique entre fonctions intégrables sur [0, 1] au sens de Riemann et suites limite-périodiques ($\varphi(k)/k$ est en effet un exemple bien connu d'une telle suite), i.e. : fonctions intégrables sur le groupe compact G produit de tous les entiers p-adiques muni de sa mesure de Haar normalisée dm. Par conséquent, on va donner un résultat général en s'appuyant sur l'argumentation ci-dessus présentée.

Théorème. *Si f est intégrable au sens de Riemann sur* [0, 1], *si $a(n)$ est une suite limite-périodique au sens de Besicovitch pour un exposant ≥ 1, alors :*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f\left(\frac{n}{N}\right)a(n)=\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} f\left(\frac{n}{N}\right)\right)\times\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} a(n)\right)$$
$$=\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\times\left(\int_G Adm\right),$$

où A est un élément de $\mathscr{L}(G, dm)$ associé à $a(n)$. (Voir [4] *pour les détails relatifs à cette association.)*

Preuve du Théorème. On pose

$$f'=f-\int_0^1 f(t)dt,$$