

43. Sur la notion de fonction multiplicative et quelques problèmes qui lui sont associés. II

Par Jean Loup MAUCLAIRE

The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1987)

0. Cette note fait suite à une note de même titre (voir [5]), où un certain nombre de résultats étaient donnés, sans démonstration cependant. Depuis lors, les démonstrations des résultats sus-mentionnés, ainsi que celles des résultats énoncés dans un certain nombre de notes, antérieures, ont été publiées en un travail d'ensemble (voir [6]).

1. Position du problème.

a) Soit $\mathcal{N}$ un ensemble de nombres de Beurling, i.e. : un semi-groupe normé par $N(\cdot)$, d'élément générique n , engendré par un ensemble P de nombres premiers p . On suppose que $Z(s)$, la fonction Zêta de $\mathcal{N}$ définie par

$$Z(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{N(n)^s},$$

ait une abscisse de convergence égale à 1. Dans un tel semi-groupe, les notions de divisibilité sont définies immédiatement, et on utilisera par conséquent les notations en usage dans le cas des entiers strictement positifs.

b) Suite équi-sommable. Si $d \in \mathcal{N}$, on note I_d l'application $\mathcal{N} \rightarrow \{0, 1\}$ définie par :

$$I_d(n) = 1 \text{ si } d \text{ divise } n, \text{ ce que l'on notera } d|n, \\ = 0 \text{ sinon.}$$

Soit Γ l'ensemble des combinaisons linéaire finies, à coefficients réels, d'éléments de la forme I_d , i.e. :

$\gamma \in \Gamma$ si et seulement si γ s'écrit

$$\gamma(n) = \sum_d a_d I_d(n), \quad |N(d)| < +\infty, \quad a_d \in \mathbf{R}.$$

Définition. Une application $a: \mathcal{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est équi-sommable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\gamma \in \Gamma$ et γ vérifie

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} Z(\sigma)^{-1} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{|\gamma(n)|}{N(n)^\sigma} < \eta, \quad \text{on ait } \limsup_{\sigma \rightarrow 1} Z(\sigma)^{-1} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{|\gamma(n)| |a(n)|}{N(n)^\sigma} < \varepsilon.$$

c) Dans le cas des entiers strictement positifs, M. K. H. Indlekofer a donné la définition suivante :

Définition. Une application $b: \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{C}$ est uniformément sommable si

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{x \geq 1} \frac{1}{x} \sum_{\substack{b(n) > K \\ n \leq x}} |b(n)| = 0.$$

M. K. H. Indlekofer a utilisé cette notion pour étendre des résultats dans à P. D. T. A. Elliott, H. Daboussi (voir [3], [2], [1]) portant sur la théorie des fonctions multiplicatives. La méthode de l'auteur précité repose essentiel-