42. *Sur la théorie des suites presque-périodiques. I*

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 13, 1985)

On va donner brièvement quelques nouveaux résultats relatifs aux suites presque-périodiques qui se déduisent de propriétés d'espaces fonctionnels définis sur le compactifié de Bohr de Z.

1. Z est le groupe additif des entiers relatifs dont le dual $\hat{Z}$ s'identifie à $R/2\pi Z$. On munit $\hat{Z}$ de la topologie discrète et le dual de $\hat{Z}$, $\bar{Z}$, est le compactifié de Bohr de Z par définition. On a le théorème:

Théorème 1. *$\bar{Z}=G\times\mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un groupe compact connexe et G est totalement discontinu.*

Remarques 1.1. $G=\prod_p Z_p$, où p décrit l'ensemble des nombres premiers et Z_p est l'anneau des entiers p-adiques.

Remarques 1.2. On peut voir de façon analogue que le compactifié de Bohr $\bar{R}$ de R est $\bar{R}=G_1\times\mathcal{G}$, où G_1 est un groupe compact connexe, et $\mathcal{G}$ est le même groupe que celui figurant dans $\bar{Z}$. On note $d\nu$ la mesure de Haar normalisée sur $\bar{R}$.

2. Suites presque-périodiques.

Définition. $f: \bar{N}^*\to C$ est une suite uniformément presque-périodique (*U.p.p.*) si f est la restriction à N^* d'une fonction continue sur $\bar{Z}$ à valeurs complexe.

Remarque. Cette définition correspond à celle donnée dans [1], dans le sens que les ensembles de fonctions obtenus sont les mêmes.

Définition. Soit $\alpha\geq 1$ donné. f est *presque-périodique* au sens de Besicovitch pour l'exposant α (B^α.*p.p.*), si pour tout $\varepsilon>0$, il existe P_ε un élément *U.p.p.* tel que $\limsup_{x\to\infty}(1/x)\sum_{n\leq x}|f(n)-P_\varepsilon(n)|^\alpha<\varepsilon$. (On écrira ($B.p.p.$) pour ($B^1.p.p.$).)

On notera $M(\cdot)$ la moyenne arithmétique, $\overline{M}(\cdot)$ la limite supérieure pour $x\to+\infty$ de $(1/x)\sum_{n\leq x}(\cdot)$, où $(\cdot)$ dépend de n.

Soit $\mathcal{L}^\alpha(\bar{Z}, dm)$ l'espace des fonctions intégrables sur $\bar{Z}$ pour dm, la mesure de Harr normalisée. On notera

$$B_0^\alpha=\{f\in B^\alpha.p.p.\mid \overline{M}(|f|^\alpha)=0\},$$

$$\mathcal{L}_0=\left\{f\in\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)\,\middle|\,\int|f|\,dm=0\right\},$$

$$\boldsymbol{B}^\alpha=B^\alpha/B_0^\alpha \quad \text{où} \quad B^\alpha=\{f\in B^\alpha.p.p.\},$$

$$L^\alpha(\bar{Z}, dm)=\mathcal{L}^\alpha(\bar{Z}, dm)/\mathcal{L}_0,$$

$$\mathrm{Sp}\,(F)=\text{spectre de } F, \text{ où } F\in\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$$

$$=\left\{\psi\in\hat{Z}\,\middle|\,\int F\bar{\psi}\,dm\neq 0\right\}.$$