41. Représentations l-adiques associées aux invariants cyclotomiques

Par Jean-François JAULENT
Université de Franche-Comté, Faculté des Sciences

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 13, 1985)

1. Introduction. On sait qu'il existe des relations précises entre certaines représentations galoisiennes données par la théorie du corps de classes, la théorie de Kummer, ou la K-théorie des corps de nombres. Le but de cette note est de comparer les caractères des représentations l-adiques attachées aux invariants cyclotomiques de divers modules classiques intervenant dans ces théories: groupes de classes, de radicaux, ou de symboles. Les identités obtenues reposent sur la notion de suite paramétrée, qui permet d'en ramener la démonstration à l'étude de modules finis, définis à chaque étage fini de la tour cyclotomique. Les détails paraîtront dans [2].

2. Notations. Nous notons l un nombre premier impair, K un corps de nombres algébriques contenant les racines l-ièmes de l'unité, $K_\infty = \bigcup_{n\in N} K_n$ la tour cyclotomique sur K (avec la convention $[K_n : K] = l^n$), $\Gamma = \gamma^{Z_l}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, et $\Lambda = Z_l[[\gamma - 1]]$ l'algèbre d'Iwasawa associée. Nous supposons que K est abélien sur un sous-corps F, de degré $d = [K : F]$ étranger à l, et nous notons Δ le groupe abélien $\mathrm{Gal}(K/F)$ ou plutôt son relèvement canonique $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/F)$. Tous les caractères considérés ici sont des caractères de Δ à valeurs dans Z_l, i.e. des éléments de l'anneau $R_{Z_l}(\Delta)$ des caractères l-adiques virtuels du groupe Δ.

L'ordre d de Δ étant pris inversible dans Z_l, l'anneau $R_{Z_l}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (1/d) \sum_{\tau\in\Delta} \varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})$$

(pour lequel les caractères irréductibles sont deux à deux orthogonaux, de carré scalaire $d_\varphi = \langle \varphi, \varphi \rangle = \deg \varphi$), et l'algèbre $Z_l[\Delta]$ est un produit direct d'anneaux locaux complets de valuation discrète $Z_l[\Delta]e_\varphi = Z_\varphi$: les idempotents primitifs $e_\varphi = (1/d) \sum_{\tau\in\Delta} \varphi(\tau)\tau^{-1}$ sont associés aux caractères l-adiques irréductibles de Δ, et chaque facteur isotypique Z_φ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension abélienne non ramifiée de Q_l, de degré $[Z_\varphi : Z_l] = \deg \varphi$.

3. Structure des $\Lambda[\Delta]$-modules. La décomposition semi-locale de l'algèbre de groupe $Z_l[\Delta]$ se propage à l'algèbre d'Iwasawa généralisée $\Lambda[\Delta]$, chaque facteur isotypique $\Lambda_\varphi = Z_\varphi[[\gamma - 1]]$ étant un anneau local régulier de dimension 2, et un Λ-module libre de dimension d_φ. Si donc X est un