

120. *Nouvelle démonstration d'une congruence modulo 16
entre les nombres de classes d'idéaux de
 $Q(\sqrt{-2p})$ et $Q(\sqrt{2p})$ pour p
premier $\equiv 1 \pmod{4}$*

Par Pierre KAPLAN^{*)}

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Dec. 12, 1981)

Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On pose $p=8l+1$ ou bien $p=8l+5$. Soient $h(-2p)$ le nombre des classes d'idéaux du corps quadratique $Q(\sqrt{-2p})$ et $h(2p)$ le nombre des classes d'idéaux au sens strict du corps quadratique $Q(\sqrt{2p})$. Soit enfin (R, S) la plus petite solution en entiers rationnels strictement positifs de l'équation

$$(1) \quad R^2 - 2pS^2 = 1.$$

La congruence que nous allons démontrer s'écrit

$$(2) \quad h(-2p) \equiv 3h(2p) \frac{S}{2} + 8l \pmod{16}.$$

Cette congruence a été découverte par Kaplan et Williams ([3] et [4]). Leur démonstration n'utilise que les formules de Dirichlet donnant le nombre des classes d'idéaux des corps quadratiques, mais est assez longue.

La démonstration que nous présentons ici s'appuie sur la théorie de Lang et Schertz [5]; elle est plus courte que la démonstration exposée dans [3] et [4], mais moins directe; de plus, on ne peut pas, semble-t-il, obtenir par cette méthode les congruences modulo 16 entre les nombres de classes d'idéaux des corps $Q(\sqrt{p})$ et $Q(\sqrt{-p})$ établies dans [6] et [4].

Nous partons du théorème 3.3 de [5], dont la deuxième formule s'écrit, pour $D=8p$ (cf. aussi Hayashi [2], p. 4):

$$(3) \quad 3h(-2p) + 6h(-p) \equiv h^*(2p) \frac{2}{e_2} \rho(u_2, v_2) \pmod{16}$$

où: $h^*(2p)$ est le nombre de classes *au sens large* de $Q(\sqrt{2p})$;

$e_2 = [U : U_2]$; U = groupe des unités de l'anneau \mathcal{O} des entiers de $Q(\sqrt{2p})$, d'unité fondamentale ε_{2p} ;

U_2 = groupe des unités de l'anneau \mathcal{O}_2 de conducteur 2, formé des nombres $X + 2Y\sqrt{2p}$, où $X, Y \in \mathbf{Z}$; enfin $\varepsilon_2 = (u_2/2) + 2v_2\sqrt{2p}$ est l'unité fondamentale de l'anneau \mathcal{O}_2 .

L'expression de $\rho(u_2, v_2)$ dépend de la parité de v_2 (cf. [4], (2.15)).

D'après Gauss [1], p. 673, 674, 694, on sait que :

^{*)} U.E.R. de Mathématiques, Université de Nancy, France.