

46. Solutions analytiques et non-analytiques pour des équations du premier ordre à symboles principaux dégénérés

Par Akira NAKAOKA

Université des sciences techniques de Kyoto

(Communicated by Kôzaku YOSIDA, M. J. A., April 13, 1981)

1. Introduction. On considère l'équation suivante ;

$$(1.1) \quad \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial u / \partial x_j = u,$$

où tous les coefficients sont analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$. On suppose, de plus, que $a_j(0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Ici on se propose d'étudier deux problèmes suivants pour (1.1) :

Problème 1. Existence d'une solution $u(x) \neq 0$ analytique à l'origine.

Problème 2. Existence d'une solution de la forme $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} H(x)$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$, $H(x)$ étant une fonction analytique $\neq 0$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice $\partial(a_1, \dots, a_n) / \partial(x_1, \dots, x_n)(0)$ et A l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors on voit qu'il faut exister un multi-indice $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \bar{\mathbf{N}}^n$ tel que :

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^n \nu_j \lambda_j = 1,$$

pour que le problème 1 soit affirmatif, où $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Mais, comme on le voit facilement, (1.2) n'est pas suffisante en général. En effet, l'équation suivante donne un contre exemple : $x^2 \partial u / \partial x + (x+y) \partial u / \partial y = u$. Une raison à cela est que dans ce cas où $0 \in A$. En effet, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. Supposons que $0 \notin A$ et que (1.2) soit vraie pour un certain multi-indice $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \bar{\mathbf{N}}^n$, alors nous pouvons trouver une solution analytique $\neq 0$ de (1.1).

Dans le cas où $0 \in A$ la situation n'est pas compliquée tellement pour le problème 2. Tout d'abord, remarquons que nous pouvons toujours supposer, sans perdre la généralité, que les coefficients aient la forme

$$(1.3) \quad a_j(x) = \lambda_j x_j + \varepsilon_j x_{j+1} + A_j(x)$$

par un changement de variables, où $\varepsilon_j = 1$ ou 0 et $A_j(x)$ s'annule à l'origine avec un ordre ≥ 2 . Nous avons les deux propositions suivantes ;

Proposition 1.1. Pour que (1.1) admette une solution de la forme $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} H(x)$, il est nécessaire que $\alpha_j = 0$ si $\varepsilon_j \neq 0$ ou bien $A_j(x)$ ne s'annule pas modulo x_j , pour $j = 1, \dots, n$.