87. *Sur la Dérivation d'une Intégrale E. R. Indéfinie. II*

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1961)

Dans la Note précédente,[1] nous avons montré que l'intégrale $E.R.$ ne possède pas la propriété newtonienne généralisée de fonction primitive, puisqu'il existe une fonction intégrable $E.R.$ telle que l'intégrale $E.R.$ indéfinie n'est pas dérivable en point de mesure positive. Dans cette Note, nous montrerons que la fonction intégrable $E.R.$ définie dans la Note précédente possède de plus la propriété: *l'intégrale E. R. indéfinie n'est pas dérivable approximativement*[2] *en point de mesure positive.*

Désormais, nons gardons, sauf indication contraire, les notations de la Note précédente.

Soit $f(x)$ une fonction intégrable $E.R.$ définie dans la Note précédente. Nons montrerons que l'intégrale $E.R.$ indéfinie de $f(x)$ n'est pas dérivable approximativement en tout point d'ensemble $F_0=H_4$. Soit x un point quelconque de F_0. Alors, il existe, pour tout $m\geq 2$, un indice $i=i(m)$ tel que $J_{\alpha_m-1,i}\ni x$, puisqu'on a $\bigcup_{j=1}^{2\alpha_m-1} J_{\alpha_m-1,j}\supseteq F_0$. Posons simplement $J_{\alpha_m-1,i}=[a_m, b_m]$. On a alors $x\in[a_m, c_{\alpha_m,i}]$ ou $x\in[d_{\alpha_m,i}, b_m]$. x étant un point d'intervalle $[a_m, c_{\alpha_m,i}]$, soit x' un point quelconque d'intervalle $L'_m=[d_{\alpha_m+1,2i}, b_m]$. x étant un point d'intervalle $[d_{\alpha_m,i}, b_m]$, soit x' un point quelconque d'intervalle $L''_m=[a_m, c_{\alpha_m+1,2i-1}]$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|F(x')-F(x)| &\geq \left|\sum_{n=\alpha_m-1}^{2\alpha_m-2}\int_x^{x'} r_n(x)dx\right| - \sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left|\sum_{n=\alpha_{m+l}-1}^{2\alpha_{m+l}-2}\int_x^{x'} r_n(x)dx\right|\right\} \\
&\geq \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_m}}\cdot\frac{2^{\alpha_m}}{\alpha_m}+\frac{2}{4^{\alpha_m+1}}\cdot\frac{2^{\alpha_m+1}}{\alpha_m+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_m-1}}{4^{2\alpha_m-1}}\cdot\frac{2^{2\alpha_m-1}}{2\alpha_m-1}\right\} \\
&\quad -2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4^{\alpha_{m+l}}}\cdot\frac{2^{\alpha_{m+l}}}{\alpha_{m+l}}+\frac{1}{4^{\alpha_{m+l}+1}}\cdot\frac{2^{\alpha_{m+l}+1}}{\alpha_{m+l}+1}+\cdots+\frac{2^{\alpha_{m+l}-1}}{4^{2\alpha_{m+l}-1}}\cdot\frac{2^{2\alpha_{m+l}-1}}{2\alpha_{m+l}-1}\right\} \\
&\geq \frac{\alpha_m}{(2\alpha_m-1)2^{\alpha_m+2}}-\frac{1}{2^{\alpha_{m+1}-2}},
\end{aligned}$$

$$|x'-x|\leq \operatorname{mes}(J_{\alpha_m-1,i})<\frac{1}{2^{\alpha_m-1}}.$$

Donc, on a $\dfrac{|F(x')-F(x)|}{|x'-x|}>\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2^{\alpha_m-1}}$ pour tout x' appartenant à L'_m(ou L''_m). De plus, si l'on pose $L_m=[a_m, b_m]$, on a, pour tout $m\geq 2$,

1) S. Nakanishi: Sur la dérivation d'une intégrale $E.R.$ indéfinie, Proc. Japan Acad., **37**, 316-318 (1961).

2) Voir S. Saks: Theory of the Integral, Subwencji funduszu Kultury narodowej, Warszawa (1937).