14. *Über die nicht algebraischen Erweiterungen algebraischer Systeme*

Von Kenjiro SHODA, M. J. A.

(Comm. Feb. 12, 1954)

In einer früheren Arbeit[1] haben wir die Theorie der algebraischen Erweiterungen eines algebraischen Systems studiert. Die vorliegende Note bildet eine Fortsetzung davon. Wir setzen die Sätze und die Terminologien in A. E. als bekannt voraus und wir beschäftigen uns jetzt mit den nicht algebraischen Erweiterungen.

§ 1. **Zerfallende Erweiterung.** Der in § 1 A. E. eingeführte Begriff der zerfallenden Erweiterungen ist grundlegend für die Untersuchung der nicht algebraischen Erweiterungen. Ist $\mathfrak{A}$ eine zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{B}$ mit Hilfe des normalen Untersystems $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\circ\mathfrak{C}$.

Satz 1. *Aus* $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}'\circ\mathfrak{B}'$ *folgt* $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}'\simeq\mathfrak{B}$, *wobei* $\simeq$ *einen Isomorphismus bedeutet.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}''/\mathfrak{B}'$ zu $\mathfrak{A}'$ isomorph ist, so induziert der Homomorphismus von $\mathfrak{A}'\simeq\mathfrak{A}''/\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{A}$ einen Ismorphismus von $\mathfrak{A}''/\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{A}$. Dabei besteht $\mathfrak{C}$ aus den Elementen, die zu den Elementen aus $\mathfrak{B}$ kongruent nach $\mathfrak{B}'$ sind. Daher ist $\mathfrak{C}\supseteq\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}'$ und ferner $\mathfrak{C}/\mathfrak{B}'\simeq\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}'\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{B}$ ist, so folgt $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{A}'\frown\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$, also ist $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}\circ\mathfrak{C}$.

In der Tat ist $\mathfrak{C}$ das $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ enthaltende kleinste normale Untersystem von $\mathfrak{A}''$. Ist $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{A}''$, so gilt also[2]

$$(\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B})\circ\mathfrak{B}'=\mathfrak{A}\circ(\mathfrak{B}\smile\mathfrak{B}').$$

Satz 2. *Jede Erweiterung Ω von $\mathfrak{A}$ ist algebraisch über einer zerfallenden Erweiterung von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Wir betrachten die sämtlichen zerfallenden Erweiterungen $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, die in Ω enthalten sind. Die dabei auftretenden Untersysteme $\mathfrak{B}$, d.h. die Untersysteme $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$, die normal in $\mathfrak{A}\smile\mathfrak{B}$ sind, bilden eine halbgeordnete Menge $\mathfrak{M}$. Da die Vereinigung $\mathfrak{B}^*$ von den $\mathfrak{B}$ in einer geordneten Teilmenge von $\mathfrak{M}$ kein Element ausser 0 mit $\mathfrak{A}$ gemeinsam hat und, da $\mathfrak{B}^*$ ersichtlich

---

1) K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, Osaka Math. J. **4** (1952), 133–144, zitiert im folgenden mit A. E. Die dort zugrundgelegten Bedingungen sind die folgenden:

a) Ist $\mathfrak{a}'$ algebraisch über $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''$ algebraisch über $\mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a}''$ algebraisch über $\mathfrak{a}$.

b) Ist α algebraisch über $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung von $\mathfrak{a}$.

2) Dies ist immer der Fall, wenn jedes Untersystem von $\mathfrak{a}$ normal ist.