13. Les Eléments Quasi-Clairsemés

(L'énumération transfinie. I)

Par Motokiti KONDÔ
L'Université Métropolitaine, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1954)

Le but de notre recherche est de discuter la structure des ensembles ordonnés et dénombrables, et de résoudre quelques problèmes de M. A. Denjoy sur l'énumération transfinie.

1. Soit R l'ensemble de tous les nombres rationnels, ordonné par rapport à l'ordre naturel. Pour un sous-ensemble E de R, nous dirons qu'un point de E est *isolé* au sens de l'ordre, s'il est un élément isolé rapport à l'ordre naturel et nous désignons par $\iota(E)$ l'ensemble de tous les points isolés de E au sens de l'ordre. Encore, nous posons

$$\delta(E)=E-\iota(E),$$

et par l'induction transfinie, nous définissons $\delta^{(\alpha)}(E)(\alpha<\Omega)$ comme il suit,

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}(E)&=\delta(E), \\ \delta^{(\alpha)}(E)&=\delta(\delta^{(\alpha-1)}(E)), && \text{si } \alpha \text{ est isolé,} \\ &=\prod_{\beta<\alpha}\delta^{(\beta)}(E), && \text{si } \alpha \text{ est limite.} \end{aligned}$$

2. Or, s'il existe un nombre ordinal η tel que $\delta^{(\eta)}(E)=0$, nous dirons que E est *quasi-clairsemé* et en particulier, si nous avons $\delta(E)=0$, nous dirons qu'il est *isolé* au sens de l'ordre.

Encore, quand tout sous-ensemble non vide de E contient au moins un point isolé au sens de l'ordre, nous dirons qu'il est *clairsemé* au sens de l'ordre.

Un sous-ensemble clairsemé de R au sens de l'ordre est quasi-clairsemé, et un sous-ensemble quasi-clairsemé de R est clairsemé, mais ces inverses ne sont pas nécessairement vraies. Or, nous avons la

Proposition 1. *Un sous-ensemble clairsemé de R, qui est fermé dans le ligne L des nombres réels, est aussi clairsemé au sens de l'ordre.*

3. Pour un sous-ensemble E de R, nous considérons l'intervalle fermé $[a,b]$[1] du ligne L qui remplit les conditions

(3.1) $[a,b]E$ est quasi-clairsemé,

1) Pour deux nombres réels a, b ($a\leqq b$) finis ou bien infinis, $[a,b]$ (ou bien (a,b)) désigne l'ensemble des nombres x réels et finis tels que $a\leqq x\leqq b$ (ou bien $a<x<b$).