144. Sur la Fonction Convexe

Par MASUO HUKUHARA

Institut de Mathématiques, Université de Tokyo

(Comm. by Z. SUTUNA, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Une fonction $f(x)$ sera appelée convexe dans un intervalle ouvert $\langle \alpha, \beta \rangle$ si elle satisfait à l'inégalité

$$(I) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour $x, y \in \langle \alpha, \beta \rangle$. A. Ostrowski a démontré¹⁾ qu'une fonction convexe est continue si elle est bornée supérieurement sur un ensemble de mesure positive. Evidemment, une fonction convexe peut-être bornée inférieurement sans être continue.

En effet, soit $g(x)$ une fonction discontinue satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(II) \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans $\langle -\infty, \infty \rangle$, la fonction

$$f(x) = \varphi(g(x))$$

est convexe. Si l'on prend, par exemple, $\varphi(x) = e^x$, $f(x)$ est discontinue et bornée inférieurement.

D'autre part, A. Ostrowski a démontré, concernant l'équation fonctionnelle

$$(III) \quad g(x) + g(y) = g(x+y),$$

le théorème suivant:

Une fonction $g(x)$ satisfaisant à cette équation est nécessairement continue, si elle ne prend, sur un ensemble de mesure positive, aucune valeur entre deux nombres.

On peut démontrer de la même manière²⁾ que cette conclusion subsiste encore pour la solution de (II).

Si l'on a (III) quand x, y et $x+y$ appartiennent en même temps à l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, nous dirons qu'une fonction $g(x)$ satisfait à (III) dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. On peut alors énoncer le théorème suivant:

Supposons que $g(x)$ satisfasse à (III) dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ et ne prenne, sur un ensemble E de mesure positive, aucune valeur entre deux nombres. Si l'on a $3\alpha < \beta$, $0 < \beta$, $g(x)$ est continue dans $\langle \alpha, \beta \rangle$ (par suite elle est égale à Ax). Si l'on a $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$, et si E est contenu

1) J. D. M. V., **38**, 56-62 (1929).

2) Funk. Ekv., **7**, 175-190 (1954).