202. *Sur Quelques Types des Théorèmes de Dualité dans les Groupes Topologiques. II*

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 13, 1954)

6. Les paragraphes 6∼8 traitent de la recherche d'un type de la dualité au sens de M. L. Pontrjagin sous la manière analogue comme dans les paragraphes précédants;[1] pour ce type de la dualité il n'en est plus du tout de même que les types étudiés jusqu'à présent. En effet, pour un groupe localement compact ($l.c.$) abélien G, le *théorème classique de Pontrjagin* peut s'écrit

$$G \cong \Phi^0(L(\Phi^0(L(G)))),^{2)} \tag{6.1}$$

où $L(G)$ désigne l'algèbre de Banach involutive des fonctions sommables sur G (pour une mesure de Haar), algèbre munie du produit de composition, de la norme d'espace L^1 et de l'involution $f \longrightarrow f^*$, $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$.[3] Ici on sait que $\Phi^0(L(G))$ n'est autre chose que le groupe dual $\hat{G}$ de G. Tous les caractères χ, $\chi \in \hat{G}$,[4] appartinnent à $A(G)$ et d'après la *théorie de M. J. von Neumann*, ils forment une base de la structure d'espace vectoriel sur $A(G)$.

Désormais quand nous parlerons d'un groupe G, il sera toujours considéré comme un groupe $l.$ $c.$ abélien, ainsi naturellement *max. p. p.*; nous avons automatiquement ${}_G\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_G$ et ${}^0_G\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^0_G$.

Or, nous avons défini ${}^0_G\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}^0_G$ comme sous-groupes topologiques du groupe précompact $\mathfrak{S}(G)$, muni de la topologie séparée (induite par la convergence simple sur $A(G)$) définie par (3.1) plus haut: mais il est possible de munir ${}^0_G\mathfrak{S}$ lui-meme d'une nouvelle topologie, qui rendra les mêmes services que la topologie du groupe bi-dual $\hat{\hat{G}}$. Soient $\hat{K}$ une partie compacte de $\hat{G} = \Phi^0(L(G))$, muni de la topologie usuelle comme le groupe dual,[5] et ε un nombre > 0 quel-

---

1) 2) S. Matsushita: *Sur quelques types des théorèmes de dualité dans les groupes topologiques*, Proc. Japan Acad., **30**, 849 (1954). Nous faisons usage des résultats et des notations de cette Note.

3) Si G est non abélien, une mesure de Haar sur G sera en général supposée à gauche et $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\rho(x)$, où $dx^{-1} = \rho(x)dx$.

4) Lorsqu'on parle d'un caractère χ, il sera toujours supposé d'être continu.

5) La topologie usuelle de $\hat{G}$ (topologie de Pontrjagin) est définie par le système fondamental de voisinages de chaque $\chi \in \hat{G}$ tels que

$$v_\chi(F, \varepsilon) = \{\chi';\ |\chi'(x) - \chi(x)| < \varepsilon \text{ pour tout } x \in F\}, \tag{*}$$

où F décrit une famille quelconque de compacts de G; *cf.* e. g. L. H. Loomis: *Abstract Harmonic Analysis*, 34C. Princeton (1953).