197. *Des Groupes Linéaires Irréductibles et la Géométrie Différentielle*

Par Shôshichi KOBAYASHI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Dec. 13, 1954)

1. *Notations.* Soit G un groupe de Lie connexe opérant transitivement et effectivement sur une variété V, H le groupe d'isotropie en un point p de V et H^0 sa composante connexe de l'identité. Soit $\tilde{H}$ le groupe d'isotropie linéaire en p. ($\tilde{H}$ peut être considéré comme une representation linéaire de H. Cette représentation est biunivoque, s'il existe sur V une connexion affine invariante par G.) Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et de H respectivement.

Théorème 1. *Si $\tilde{H}$ est irréductible et si $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ dans le sens de Koszul* [2], *alors le normalisateur connexe $N(H^0)$ de H^0 dans G coïncide avec H^0: $N(H^0)=H^0$.*

Démonstration. Le sous-ensemble $N(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ défini par

$$N(\mathfrak{h})=\{x\in\mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}\}$$

est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui engendre $N(H^0)$. Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ tel que:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m},\qquad \mathfrak{h}\frown\mathfrak{m}=0,\qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}.$$

Si l'on définit un sous-espace $\mathfrak{n}$ par

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\frown N(\mathfrak{h}),$$

on a

$$N(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}+\mathfrak{n},\qquad \mathfrak{h}\frown\mathfrak{n}=0,\qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}\cap\mathfrak{h}=0.$$

Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{m}$ tel que:

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{t},\qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{t}]\subset\mathfrak{t}.$$

D'autre part, à cause de l'irréductibilité de $\tilde{H}$, on a

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]=\mathfrak{m}.$$

Donc $\mathfrak{n}=0$, c.q.f.d.

Théorème 2. *Si $\tilde{H}$ est irréductible et si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont réductives dans $\mathfrak{g}$, alors G est semi-simple.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ se décomposent de la manière suivante:

$$\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]+\mathfrak{c},\qquad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\frown\mathfrak{c}=0$$

$$\mathfrak{h}=[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]+\mathfrak{d},\qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\frown\mathfrak{d}=0.$$

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ sont semi-simples et $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$ sont les centres de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{h}$ respectivement. Nous allons d'abord démontrer que $\mathfrak{d}\subset[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.