156. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. I

Par Shizu NAKANISHI

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1956)

En utilisant la méthode des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a élargi la notion de l'intégrale dans la Note "Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I".[1] Le but de ces Notes est de montrer que l'intégrale au sens de Denjoy (Denjoy-Perron) peut être considérée d'au point de vue de cette notion.

Dans cette Note, nous allons surtout montrer que, pour qu'une fonction $f(x)$ soit intégrable au sens de Denjoy, il faut et il suffit qu'il existe, dans l'espace rangé ε,[2] une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=v_n(f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, jouissant de la propriété P' (qu'on donne plus bas) et telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ presque partout dans l'intervalle $[a,b]$.

Nous nous conformons, sauf indication contraire, à la notation et à la terminologie de la Note de Prof. K. Kunugi.

Définition 1. Nous dirons qu'une suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, jouit de la *propriété* P' si elle satisfait aux conditions suivantes α) et β):

α) On peut poser, pour tout n $(n=0,1,2,\cdots)$,

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x),$$

où $p_n(x)$, $r_n(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant, outre qu'elles satisfont aux conditions [1], [2] et [3],[3] aux conditions suivantes:

α.1) On a $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\int_{CF_{n+1}}|p_m(x)|\,dx<2^{-\nu_{n+1}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.[4]

α.2) Pour tout système élémentaire[5] d'intervalles I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ tel que $I_i\cap F_n\neq 0$ pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r_n(x)dx\right|<2^{-\nu_n}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956).

2) Voir K. Kunugi: Loc. cit.

3) Elles désignent les conditions [1], [2] et [3] qui sont données dans la Note de K. Kunugi: Loc. cit., c-à-d. [1] $r_n(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F_n. [2] On a $\int_a^b |p_n(x)|\,dx<2^{-\nu_n}$. [3] On a $|\int_a^b r_n(x)dx|<2^{-\nu_n}$.

4) Pour un ensemble de points quelconque M, CM désigne le complément de M pour l'intervalle $[a,b]$.

5) On dit qu'un système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres.