

33. Eine Verschlingungsinvariante

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1958)

Seien P eine dreidimensionale und Q eine zweidimensionale orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit, f eine stetige Abbildung von P in Q und ε eine positive Zahl. Dann existiert eine zu f homotope Abbildung f' von P in Q mit $d(f, f') < \varepsilon$ und der Eigenschaft, dass die Menge aller Punkte p aus P mit $f(p) = f'(p)$ ein endliches euklidisches Polyeder A einer Dimension ≤ 1 ist. Wenn $\dim A < 1$, so sei die "Verschlingungszahl" von f gleich Null. Hierauf wollen wir weiterhin voraussetzen, dass $\dim A = 1$, und es seien $A_1, A_2, \dots$ die Komponenten von A .

Wir fassen nun zunächst die A_i in Klassen zusammen: Es mögen A_j und A_k zur gleichen Klasse gehören, wenn eine in P gelegene Kurve $(a_\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ existiert mit $a_0 \in A_j, a_1 \in A_k$ derart, dass die geschlossene Kurve

$$(f(a_\tau), 0 \leq \tau \leq 1, f'(a_\tau), 1 \geq \tau \geq 0)$$

innerhalb Q nullhomolog ist. Offenbar ist diese Erklärung reflexiv, symmetrisch und transitiv. Alsdann ordnen wir die A_i so in eine Folge

$$A_1^i, i=1, 2, \dots, A_2^i, i=1, 2, \dots, \dots,$$

dass die $A_1^i, A_2^i, \dots$ für jedes k eine Klasse bilden. Für alle k sei B_k das Polyeder $\bigcup_i A_k^i$. Weiter bedeute C_k eine simpliziale Zerlegung von B_k . Wenn $\dim C_k = 0$, so sei $z_k = 0$. Sonst seien $D_1, D_2, \dots$ die 1-Simplexe von C_k , ferner d_i eine Orientierung von D_i und γ_i der unten definierte Grad von d_i bezüglich (f, f') . Dann ist die ganzzahlige 1-Kette

$$\sum \gamma_i d_i$$

ein ganzzahliger Zyklus z_k .

Wenn alle z_k in bezug auf P berandet, so sei die "Verschlingungszahl" von f Null. Ebenso sei die "Verschlingungszahl" von f Null, wenn keiner der Zyklen z_k bezüglich P berandet.

Hierauf kann man annehmen, es existiere eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass z_k für $k \leq n$ berandet und für $k > n$ nicht berandet. Wir setzen

$$z = \sum_{k \leq n} z_k \quad \text{und} \quad z' = \sum_{k > n} z_k.$$

Alsdann heiße die Gesamtheit $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ der bezüglich P gebildeten Verschlingungszahlen von z und z' der "Verschlingungstyp" von f . Dieser letztere Typ ist homotopieinvariant, näherhin: wenn f^* eine zu