9. *Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. III*

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Jan. 12, 1960)

Continuons l'étude sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes.[1] Dans cette note, nous désignerons par E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets.[2]

1. Théorèmes de l'identité et de Liouville. Commençons par nous préparer un lemme suivant:

Lemme 1.1. *Soient x_0 un point fixé de E, V, V_1 et V_2 trois voisinages disqués et ouverts de 0 dans E, tels qu'on ait $V \supset V_1+V_1+V_1$ et $V_1 \supset V_2+V_2$. Soient $\Omega = x_0+V$, $\Omega_1 = x_0+V_1$, x_1 un point fixé de Ω_1 tel que $x_1-x_0 \in V_2$, $\Omega_2 = x_1+V_2$. Si f est une application définie sur Ω à valeurs dans F, faiblement dérivable partout dans Ω au long de h pour tout $h \in E$ et $f=0$ partout dans Ω_2, f doit être aussi égale à 0 identiquement dans Ω.*

Démonstration. Remarquons, d'abord, qu'on a $\Omega \supset \Omega_1 \supset \Omega_2$. Soit x_2 un point arbitraire dans Ω_1; comme V_1 est disqué, on a $x_2-x_1 \in V_1+V_1$. Puisque V_1+V_1 est aussi un voisinage disqué et ouvert de 0, il existe un nombre α (>1), tel que, pour tout nombre complexe $t(|t|<\alpha)$, $t(x_2-x_1) \in V_1+V_1$ et par suite $x_1+t(x_2-x_1)-x_0 \in V_1+V_1+V_1 \subset V$ ont lieu. D'autre part, il existe un nombre β $(0<\beta<\alpha)$, tel que la relation $|t|<\beta$ entraîne $t(x_2-x_1) \in V_2$ (V_2 disqué).

Par l'hypothèse, une fonction $\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1))$ d'une variable complexe définie dans un domaine $D=\{t; |t|<\alpha\}$ dans le plan complexe à valeurs dans F est régulière dans D et égale à 0 dans un domaine $D_1=\{t; |t|<\beta\}$ contenu dans D. Donc, en vertu du remarque 3.1 (I), pour chaque $y' \in F'$ (le dual de F), une fonction numérique $\langle \varphi(t), y' \rangle$ est régulière dans D et égale à 0 dans D_1, le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre F et F'. Or, dans cette condition, on a $\langle \varphi(t), y' \rangle = 0$ partout dans D pour chaque $y' \in F'$, à cause du théorème de l'identité dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Par conséquent, l'identité $f(x_1+t(x_2-x_1))=0$ a lieu partout dans D, en particulier, en

1) R. Iino: Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I, Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959); Ibid. II, **35**, no. 9, 530-535 (1959). Nous noterons par (I) et (II) ces Notes, respectivement.

2) L'hypothèse à la complécité de E n'est pas essentielle, ainsi que dans (I) et (II).