

150. Sur la Théorie Générale des Ensembles Partiellement Ordonnés. III

Par Mihail BENADO

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1960)

Résumé. Cette note contient des résultats concernant les propriétés générales des structures géométriques modulaires d'une configuration [1]. Elle fait suite à ma note [2] dont je présume la connaissance.

1. *Structures géométriques modulaires; définition.* 1.1. *Définition.* J'appellerai *modulaire* au sens de M. Alexander Kurosch ou simplement *K-modulaire*, toute $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\mathcal{I}\{a, b\}$, $d\mathcal{I}\{a, b'\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b'\}$ et $b \geq b'$ entraînent l'égalité $b = b'$.

1.2. *Définition.* J'appellerai *modulaire* au sens de M. Øystein Ore ou *O-modulaire* tout court, toute $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, a_1, b, b', d, m \in \mathfrak{P}$, $d\mathcal{I}\{a, b\}$, $m\Sigma\{a, b\}$, $d \geq a_1 \geq a$ et $b \geq b' \geq m$ entraîne l'équivalence logique des relations $a_1\mathcal{I}\{a, b'\}$ et $b'\Sigma\{a_1, b\}$.

1.3. *Définition.* J'appellerai *modulaire* au sens de M. Morgan Ward ou encore *W-modulaire*, toute $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que les relations $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$, $d\mathcal{I}\{a, b\}$ et $m\Sigma\{a, b\}$ entraînent l'isomorphisme au sens de l'ordre partiel $d/a \gtrsim b/m$.

1.4. *Définition.* J'appellerai *circulaire* toute $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -structure géométrique de $\mathfrak{P}$ telle que pour tous les $a, b, d, m \in \mathfrak{P}$ satisfaisant à $d\mathcal{I}\{a, b\}$ et à $m\Sigma\{a, b\}$, les quotients ([2], 1.2.1) d/a et a/m soient des chaînes (=ensembles totalement ordonnés).

2. *Propriétés.* 2.1. *Théorème.* Toute $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -structure géométrique analytique, fermée ([2], 1.6.4, 1.6.7) et *K-modulaire* (1.1) possède les propriétés suivantes: 1. Elle est à similitude ([2], 1.6.9), 2. Elle est saturée ([2], 1.6.8), 3. Elle est primitive au sens que voici: Pour chaque $(\mathcal{I}, \Sigma)$ -quadrilatère ([2], 1.4) $(a, b; d, m)$ de $\mathfrak{P}$, la condition $d \succ a$ équivaut à la condition $b \succ m$ (Ici $x \succ y$ veut dire $x > y$ et les relations $x \geq z \geq y$ entraînent ou bien $z = x$ ou bien $z = y$), 4. Si elle est moins fine que la structure géométrique rieszienne de $\mathfrak{P}$ ([2], 1.5.2), alors elle est déjà moins fine que la structure géométrique dédékindienne et, en outre, elle est *O-modulaire* (1.2), 5. Si elle est circulaire (1.4) elle est aussi *O-modulaire*.

2.2. *Théorème.* Toute structure géométrique conditionnellement raffinante ([2], 1.6.2) fermée et *K-modulaire* est également *O-modulaire*.

2.3. *Théorème.* Pour qu'une structure géométrique analytique (ou bien fermée) et *O-modulaire* soit *K-modulaire*, il faut et il suffit