2. *Quelques remarques sur les groupes algébriques réels*

Par Hideya MATSUMOTO
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Zyoiti SUETUNA, M.J.A., Jan. 13, 1964)

1. Le but de cette note est d'appliquer un résultat de I. Satake [6] à quelques questions sur les groupes algébriques linéaires réels: on étudie la connexion topologique d'un groupe algébrique irréductible, les automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple et les classes de conjugaison, respectivement des sous-algèbres résolubles maximales et des sous-algèbres de Cartan, d'une algèbre de Lie semi-simple.

L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

L'auteur désire exprimer ici sa profonde reconnaissance à M. N. Iwahori et M. T. Nagano, qui ont bien voulu diriger ses études.

2. Rappelons brièvement un résultat dans [6] sur lequel on s'appuiera dans ce qui suit.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\boldsymbol{R}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}_u$ une forme réelle compacte de $\tilde{\mathfrak{g}}$ telle que l'involution τ associée à $\mathfrak{g}_u$ commute à l'involution σ associée à $\mathfrak{g}$: on a alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{p}=\mathfrak{g}\cap\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_u$. Soit $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^++\mathfrak{h}^-$ ($\mathfrak{h}^+=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}, \mathfrak{h}^-=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}^-$ soit une sous-algèbre maximale dans $\mathfrak{p}$. La complexifiée $\tilde{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$: soit Σ le système de racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$ relatif à $\tilde{\mathfrak{h}}$, une racine étant identifiée avec un élément de $\mathfrak{h}_0=\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}^++\mathfrak{h}^-$ en utilisant la restriction à $\tilde{\mathfrak{h}}$ de la forme de Killing de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ un système fondamental de Σ tel qu'on ait, pour toute racine positive β,

$$\sigma\beta=-\beta \text{ ou bien } \sigma\beta>0.$$

On sait alors la proposition suivante (voir [6], proposition 2):

Proposition A. *Si* $(\mathfrak{g}_u^*, \mathfrak{h}^*, \Delta^*)$ *est un autre système satisfaisant aux mêmes conditions que* $(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{h}, \Delta)$, *il existe un automorphisme intérieur* ξ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\xi(\mathfrak{g}_u)=\mathfrak{g}_u^*$, $\xi(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}^*$ *et* $\xi(\Delta)=\Delta^*$, ξ *s'étendant canoniquement en un automorphisme de* $\tilde{\mathfrak{g}}$.

$\sigma_0=\sigma|\mathfrak{h}_0$ peut être écrit sous la forme $\sigma_0=s_0r_0=r_0s_0$ où s_0 est dans le groupe de Weyl W associé à Σ et r_0 transforme Δ en lui-même. On notera W_σ le sous-groupe de W composé des éléments commutant à σ_0.

Le schéma de Satake-Tits de $\mathfrak{g}$, désigné par le symbole (Δ, σ), est le schéma obtenu, à partir du schéma de Dynkin de $\tilde{\mathfrak{g}}$ représentant $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$, en marquant les sommets dans $\Delta_0=\Delta\cap\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}^+$ et