

178. Sur une représentation de la fonction delta de Dirac. III

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjiro KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

Montrons que dans cette Note nous pouvons définir un noyau $P(x)$ intégrable (E. R. ν) indéfiniment dérivable, sauf pour une infinité dénombrable, de façon que les conditions suivantes soient remplies: quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ continue et périodique de période 2π , on a

$$\varphi(x) = (\text{E. R. } \nu) \int_{-\infty}^{\infty} P(x-y)\varphi(y)dy,^{1)}$$

et la dérivée d'ordre m de la fonction $\varphi(x)$ s'exprime

$$\varphi^{(m)}(x) = (\text{E. R. } \nu) \int_{-\infty}^{\infty} P^{(m)}(x-y)\varphi(y)dy,$$

chaque fois que $\varphi(x)$ est exprimable comme une $m^{\text{ième}}$ intégrale ($m=1, 2, \dots$).

En particulier, on voit que, dans le cas de δ de Dirac, on peut localement connaître comme la dérivée au sens ordinaire d'un noyau la dérivée au sens de distribution de la manière que: pour toute fonction $\varphi(x)$ indéfiniment dérivable dont le support est contenu dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on a

$$\delta^{(m)}(\varphi) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) = (\text{E. R. } \nu) \int_{-\infty}^{\infty} P^{(m)}(x)\hat{\varphi}(x)dx$$

en considérant la fonction $\hat{\varphi}(x)$ égale à $\varphi(x)$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$ et de période 2π à la place de $\varphi(x)$.

Prenons pour ν une mesure définie par

$$\nu(A) = \int_A e^{-|x|} dx.$$

On a d'abord le

Lemme 3. Soient $\varphi(x)$ une fonction bornée et périodique de période 2π , et $\{k_j(x); j=1, 2, \dots\}$ une suite des fonctions satisfaisant les propriétés suivantes:

- i) $k_j(x) = 0$ en dehors d'intervalle $-\pi \leq x < \pi$,
- ii) on a $\max_x |k_j(x)| \leq \max_x |k_{j+1}(x)| < \infty$,

1) Plus précisément, il suffit que $\varphi(x)$ soit une fonction bornée (pas nécessairement continue). On a alors

$$\varphi(x) = (\text{E. R. } \nu) \int_{-\infty}^{\infty} P(x-y)\varphi(y)dy$$

en tout point x tel que la fonction $\varphi(x)$ soit continue.