169. *Sur la régularité des points frontières relative à l'équation linéaire du type elliptique et du second ordre dans le problème de Dirichlet. I*

Par Seturo SIMODA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

A propos de l'équation linéaire du type elliptique

(1) $\mathfrak{L}u=\Sigma_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{ij}^{2}u+\Sigma_{k=1}^{n}b_{k}(x)\partial_{k}u+c(x)u=f(x),$

on peut considérer plusieurs sortes de la régularité d'*un* point quelconque frontière d'un domaine borné d—la régularité pour d—à fermeture contenue dans le domaine $\mathfrak{G}(\subseteq R^{n})$, où les coefficients a_{ij}, b_{k}, c, et f de (1) sont prescrits et continus au sens de Hölder.

§1. Régularité simple. DÉFINITION 1.1. (*Régularité simple*). On dit qu'*un* point $\Xi\in\partial d$ est *régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d, lorsque et seulement lorsqu'il existe une hypersphère ouverte $\Sigma=\Sigma(\Xi)$ centrée sur Ξ et une fonction $\Psi\in C^{2}(d\cap\Sigma)$ remplissant les conditions suivantes:

《1》 $\Psi(x)>0$ dans $d\cap\Sigma$ entier,

《2》 $\lim_{\substack{x\to\Xi\\(x\in d\cap\Sigma)}}\Psi(x)=0$ et

《3》 $\mathfrak{L}\Psi\leqq-1$ partout dans $d\cap\Sigma$.

Concernant la régularité de cette façon, on établit un théorème comme ceci:

THÉORÈME 1. *Soit* Ξ un *point* fixe *de* ∂d. *Pour que* Ξ *soit régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d, *il faut et suffit que* Ξ *soit régulier* ($\mathfrak{P}u=0$) *pour* d, *où* $\mathfrak{P}$ *est donné comme l'opérateur différentiel de l'équation*

(2) $\mathfrak{P}u=\Sigma_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{ij}^{2}u=f(x).$[1)]

La régularité simple d'un point frontière $\Xi\in\partial d$ pour le domaine d *ne se rapporte pas rien* à *l'existence des solutions dans* d; c'est ce qui seulement sert à confirmer la convergence d'une solution $u(x)$ dans d lorsque $x\to\Xi$, si elle proprement existe, moyennant soit un théorème de comparaison ou le principe du maximum. Par exemple, tout point frontière d'une hypersphère ouverte Σ est régulier ($\Delta u=0$) pour Σ et donc aussi régulier ($\Delta u+ku=0$) pour Σ quel que soit $k>0$. Mais il n'y a rien de solution pour certaines $k>0$ *excepté des solutions trés spéciales*. En résumé la régularité simple du point $\Xi\in\partial d$ pour d n'est qu'une relation géometrique entre le point Ξ et le domaine d exprimée à l'aide de l'équation.

---

1) Cf. Théorème 1.1 (p. 34) dans
S. Simoda: Sur la régularité des points frontières relative à l'équation linéaire du type elliptique et du second ordre. Mem. Osaka, Gakugei Univ., B, No. 13, 33-53 (1964).