34. *Sur les suites filtrantes de nombres*

Par Tokui SATŌ et Yasusi TAKEMURA
Département de Mathématiques, Université de Kōbe

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., March 12, 1968)

1. Un des auteurs a donné dans [1] la notion de la suite filtrante de nombres comme généralisation de la suite de nombres et exposé qu'elle est une technique générale dans l'analyse mathématique classique.

Nous montrons ici que quelques résultats obtenus dans [1] subsistent sous l'hypothèse plus faible.

2. Soient $R^{\#}$ l'ensemble des nombres réels et Γ un ensemble ordonné filtrant au sens de Tukey.

Nous appelons $\{a_\lambda\}$ $(a_\lambda \in R^{\#}, \lambda \in \Gamma)$ suite filtrante de nombres.

Théorème 1. *La limite supérieure et la limite inférieure d'une suite filtrante de nombres* $\{a_\lambda\}$ $(\lambda \in \Gamma)$ *sont respectivement la plus grande limite et la plus petite limite.*

Preuve. Il suffirait de prouver que $\overline{\lim}_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda$ est la plus grande limite dans le cas où $\overline{\lim}_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda$ est finite.

Par définition on a

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda \in L,$$

où L est l'ensemble des limites au sens généralisé de $\{a_\lambda\}$.

Soit l un élément quelconque mais fixé de L, on a alors l'inégalité

$$l \leqq \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

Raisonner par l'absurde. Supposons que l'on ait

$$l > \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

On peut prendre $\varepsilon > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda < l - \varepsilon.$$

l étant l'élément de L, l'ensemble Δ des éléments μ tels que $l-\varepsilon < a_\mu$ est cofinal dans Γ. On a donc

$$\overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\mu \leqq \overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda.$$

D'autre part, on obtient

$$l - \varepsilon \leqq \overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\mu.$$

Par suite, on a

$$\overline{\lim_{\lambda \in \Gamma}}\, a_\lambda < \overline{\lim_{\mu \in \Delta}}\, a_\lambda,$$