32. *Eine Bemerkung über Kogeneratoren*

Von Takeshi ONODERA
Mathematisches Institut, Hokkaido Universität

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., Feb. 12, 1971)

Seien R ein Ring mit 1 Element, ${}_RM$ ein unitärer R-Linksmodul und $S=\mathrm{End}\,({}_RM)$ der Endomorphismenring von ${}_RM$. ${}_RM_S$ ist dann ein R-S-Bimodul. Ferner bezeichnen wir mit M^* und M^{**} das Duale und Biduale von ${}_RM: M^*=\mathrm{Hom}\,({}_RM, {}_RR)$, $M^{**}=\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Hom}\,({}_RM, {}_RR)_R, R_R)$. ${}_SM^*_R$ und ${}_RM^{**}_S$ sind dann in bekannter Weise S-R- und R-S-Bimoduln. Es gibt einen natürlichen (R-S-) Homomorphismus φ von M in M^{**}, der folgendermaßen definiert wird:

$$\varphi(x)=f(x),\ x\in M,\ f\in M^*.$$

${}_RM$ heißt torsionslos, wenn φ ein Monomorphismus ist, reflexiv, wenn φ ein Isomorphismus ist. Diese Begriffe stammen von H. Bass.

Ein Ring R heißt Linkskogenerator (Rechtskogenerator), wenn jeder R-Linksmodul (R-Rechtmodul) torsionslos ist. R ist (zweiseitiger) Kogenerator wenn R gleichzeitig Links- und Rechtskogenerator ist. Wenn R Kogenerator ist, dann sind ${}_RR$ sowie R_R injektiv ([3], Satz 2).

Das Ziel dieser Note besteht darin, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. *Sei R ein Ring, der (zweiseitiger) Kogenerator ist, und seien ${}_RM$ ein treuer R-Linksmodul sowie S der Endomorphismenring von ${}_RM$. Dann gilt: ${}_RM$ ist dann und nur dann reflexiv, wenn M_S injektiv ist.*

Den Beweis bereiten wir mit folgendem Lemma vor.

Lemma. *Seien R ein Ring, ${}_RM$ ein treuer torsionsloser R-Linksmodul und S der Endomorphismenring von ${}_RM$. Dann ist $\varphi(M)_S$ groß in M^{**}_S als S-Rechtsmodul.*

Beweis des Lemmas. Seien g ein beliebiges von Null verschiedenes Element von M^{**} und f_0 ein Element von M^*, so daß $g(f_0)\neq 0$. Da ${}_RM$ treu ist, gibt es $m_0\in M$, so daß $g(f_0)m_0\neq 0$. Sei s der Endomorphismus von ${}_RM$, der folgendermaßen definiert wird:

$$xs:=f_0(x)m_0,\ x\in M.$$

Da $(sf)(x)=f(xs)=f_0(x)f(m_0)=(f_0\cdot f(m_0))(x)$, $f\in M^*$, $x\in M$, gilt $sf=\cdot f_0\cdot f(m_0)$ für alle $f\in M^*$. Daraus folgt daß $(gs)(f)=g(sf)=g(f_0)f(m_0)=f(g(f_0)m_0)$. Das bedeutet, daß $(0\neq)\ gs=\varphi(g(f_0)m_0)\in gS\cap\varphi(M)$, und der Beweis ist damit vollständig.

Beweis des Satzes. Da R Kogenerator ist, ist ${}_RM$ torsionslos. Sei M_S injektiv. Dann ist $\varphi(M)_S$ injektiv und nach dem Lemma folgt $\varphi(M)=M^{**}$. Daraus folgt, daß φ Isomorphismus ist, das heißt, ${}_RM$