155. *Les fonctions de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demi-espace*[*)]

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Nov. 12, 1971)

§1. Problème et résultat. Soit Ω le demi-espace euclédien de $\boldsymbol{R}^{n+1}(n\geqq 1)$ défini par $\Omega=\{(x,s)\,;\,x>0 \text{ et } s\in \boldsymbol{R}^n\}$. Nous considérons, dans Ω, un opérateur différentiel elliptique L du second ordre de la forme

$$\begin{aligned}Lv(x,s)=&\left(1-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial s_j{}^2}\right)(xv(x,s))\\&-\rho\frac{\partial v}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial v}{\partial s_j}(x,s),\end{aligned}\tag{1}$$

où ρ et $b_j(1\leqq j\leqq n)$ sont *des constantes réelles.* Nous nous bornerons à l'un des deux cas suivants:

Cas I. $\rho=-1$ et $b_1=\cdots=b_n=0$;

Cas II. $\rho<-3/2$ et $b_1,\cdots,b_n$ sont arbitraires.

L est alors uniformément elliptique dans chaque compact de Ω et il dégénère partout sur $x=0$ dans toutes les directions. Dans le Cas I, L est formellement auto-adjoint.

Le problème initial qui nous intéresse est le suivant:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,s)+Lu(t,x,s)=0, \text{ pour } (t,x,s)\in \boldsymbol{R}_+\times\Omega, \text{ et,}\\ u(0,x,s)=u_0(x,s) \text{ (donnée), pour } (x,s)\in\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

où nous ajoutons, dans le Cas II, la condition de Dirichlet homogène

$$u(t,0,s)=0, \text{ pour } (t,s)\in \boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{R}^n.\tag{3}$$

Ce problème initial (2) dans le Cas I (ou (2)−(3) dans le Cas II) se résoud au moyen de semi-groupe dans le cadre de $L^2(\Omega)$. Plus précisément, réalisons L comme opérateur fermé dans $L^2(\Omega)$ en fixant le domaine

$$\begin{cases}D(L)=W_1^2(\Omega), \text{ dans le Cas I, et}\\ D(L)=W_1^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \text{ dans le Cas II,}\\ \text{où } W_1^2(\Omega)=\{v(x,s)\in H^1(\Omega)\,;\,xv(x,s)\in H^2(\Omega)\}.\end{cases}\tag{4}$$

Alors, dans chacun des Cas I et II, $-L$ engendre un semi-groupe de contraction e^{-tL} au sens de Hille-Yosida (voir [1] et [3]). Et, si $u_0\in D(L)$, alors $u(tx,s)=(e^{-tL}u_0)(x,s)$ est la seule solution de (2) ((2)−(3) resp.) dans ce cadre. Ce semi-groupe admet la représentation par noyau de sorte que

$$(e^{-tL}u_0)(x,s)=\int_\Omega G(t\,;\,x,y\,;\,s-s')u_0(y,s')dyds',\tag{5}$$

*) Ce travail a été partiellement supporté par une bourse de Sakkokaï.