29. Über die Metrisation der topologischen Gruppen.

Von Shizuo KAKUTANI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., April 13, 1936.)

In der vorliegenden Note zeige ich, dass für die Metrisierbarkeit der topologischen Gruppen das erste Abzählbarkeitsaxiom allein (und zwar nur in der Umgebung des Einheitselementes) ausreichend ist, und dass man dabei sogar eine Metrik einführen kann, die in bezug auf die Gruppentransformation invariant ist. Ich beweise nämlich den folgenden

Satz. Wenn die topologische Gruppe G dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, dann kann man in G eine Metrik $\rho(x, y)$ einführen, welche ausser den drei Distanzaxiomen noch der isometrischen Relation

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y) \tag{1}$$

genügt.

Vorbemerkung. Aus dem Satz vom Herrn Kondô[1] sieht man leicht ein, dass wir in G eine solche (der Relation (1) genügende) Metrik einführen kann, wenn G dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt; und wenn man nur die Metrisierbarkeit verlangt, so ist dies ein Korollar des bakannten Alexandroff-Urysohnschen[2] Satzes.

Beweis. Es sei

$$U_1 \supset U_{\frac{1}{2}} \supset U_{\frac{1}{4}} \supset \cdots\cdots \supset U_{\frac{1}{2^n}} \supset \cdots\cdots \ni e \tag{2}$$

ein definierendes System von Umgebungen des Einheitselementes, welches den folgenden Bedingungen genügt:

$$U^2_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{1}{2^{n-1}}}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots\ldots \tag{3}$$

$$U^{-1}_{\frac{1}{2^n}} = U_{\frac{1}{2^n}}, \qquad n=0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{4}$$

Wir setzen $U_{\frac{3}{4}} = U_{\frac{1}{2}} \cdot U_{\frac{1}{4}}$, und im allgemeinen

$$U_{\frac{2m+1}{2^n}} = U_{\frac{m}{2^{n-1}}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}}, \quad m=1, 2, 3, \ldots\ldots, 2^{n-1}-1\,; \ n=2, 3, \ldots\ldots \tag{5}$$

Damit is U_r für jedes r von der Form $\frac{k}{2^n}$ ($k=1, 2, \ldots\ldots, 2^n$; $n=0, 1, 2, \ldots\ldots$) definiert und es besteht die Relation

$$U_{\frac{k}{2^n}} \cdot U_{\frac{1}{2^n}} \subset U_{\frac{k+1}{2^n}}, \qquad k=1, 2, \ldots\ldots, 2^n-1\,; \ n=1, 2, \ldots\ldots \tag{6}$$

Für ein gerades k ist dieses klar. Den Fall eines ungeraden k beweisen wir durch die vollständige Induktion. (6) ist nämlich für $n=1$ klar und wenn (6) für $n-1$ schon bewiesen ist, dann ist aus (3) und (5)

---

1) M. Kondô: A Problem of the Metrisation in Hausdorff's Topological Spaces, Tôhoku Math. Journal, vol. 37 (1933), p. 383.

2) P. Alexandroff und P. Urysohn: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace ($\mathscr{L}$) soit une classe ($\mathscr{D}$), C. R. t. 177 (1923), p. 1274.