

110. Über die Approximation quadratischer Irrationalzahlen durch rationale.

Von Sigekatu KURODA.

Tokyo Higher Normal School for Girls.

(Cmm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Wir bezeichnen mit $M(\vartheta)$ für irrationales ϑ die obere Grenze der positiven Zahlen λ , für welche die diophantische Ungleichung

$$\left| \vartheta - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{\lambda y^2}$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen zulässt. Durch Kettenbruchmethode bestimmte Perron¹⁾ die Zahl $M(\vartheta)$ für quadratische Irrationalzahl ϑ und lieferte einige Beispiele der quadratischen Zahlen, für die die obige Ungleichung mit $\lambda = M(\vartheta)$ endlich bzw. unendlich viele Lösungen zulässt. Im Folgendem wird dieser Satz von Perron kettenbruchsfrei formuliert und bewiesen, sowie der Grenzfall erledigt. Wie zuerst von Herrn Fujiwara²⁾ bemerkt und von Herren Perron²⁾ und Shibata³⁾ untersucht, steht tatsächlich dieser Satz im nahen Zusammenhang mit den Markoffschen Zahlen.

Satz 1. Es sei ϑ eine quadratische Irrationalzahl mit der Diskriminante $D > 0$. Die zu ϑ gehörige Gleichung sei

$$a\vartheta^2 + b\vartheta + c = 0, \quad a > 0.$$

Es sei ferner k die kleinste positive ganze Zahl, für die mindestens eine der diophantischen Gleichungen

$$(1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 = \pm k$$

Lösungen hat. Dafür dann, dass die diophantische Ungleichung

$$(2) \quad \left| \vartheta - \frac{x}{y} \right| < \frac{k + \varepsilon}{\sqrt{D} y^2}$$

nur endlich viele Lösungen habe, ist notwendig und hinreichend, dass entweder $\varepsilon < 0$ ist oder $\varepsilon = 0$ und die Gleichung (1) nur für das untere Vorzeichen lösbar ist.

Beweis: Es sei ϑ' die zu $\vartheta = (-b + e\sqrt{D})/2a$, $e = \pm 1$, konjugierte Zahl. Alsdann ist

$$(3) \quad \frac{x}{y} - \vartheta' = \left(\frac{x}{y} - \vartheta \right) + (\vartheta - \vartheta') = \left(\frac{x}{y} - \vartheta \right) + e \frac{\sqrt{D}}{a}.$$

1) O. Perron, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. SB. Heidelberg. Akad. Wiss. 1921, Abh. 4.

2) O. Perron, Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale, II, S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1921, Abh. 8.

3) K. Shibata, On the approximation of irrational numbers by rational numbers. Jap. J. Math. 1. 1924.