

25. Sur la projection d'un ensemble plan G_δ .

Par Kinjiro KUNUGUI.

L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1938.)

On sait que tout ensemble analytique linéaire est une projection d'un ensemble plan borelien (plus précisément, d'un ensemble plan G_δ). Il serait donc naturel à se demander quelle est la condition pour que cette projection soit un ensemble borelien. M. N. Lusin a démontré que¹⁾ la projection uniforme²⁾ d'un ensemble plan borelien est aussi un ensemble borelien. Tandis que M. E. Szpilrajn a posé un problème,³⁾ qui concerne la généralisation de ce théorème devenu déjà classique: Soit M un ensemble plan G_δ dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles fermés. La projection de M est-elle toujours un ensemble borelien?

Or, nous allons y donner une réponse affirmative. Notamment nous démontrons le théorème suivant:

Théorème. M étant un ensemble plan, désignons par $\Gamma(M)$ l'ensemble de tous les points $(x, 0)$ ayant la propriété: la droite parallèle à l'axe OY , passant par le point $(x, 0)$, coupe l'ensemble M en un ensemble fermé non vide. Si M est un ensemble plan G_δ , $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique.

Démonstration. 1. Soit N l'ensemble de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1, et considérons l'espace 2^N , la famille de tous les sous-ensembles fermés non vides de N . La distance entre deux éléments A, B de 2^N est définie d'après la formule de M. F. Hausdorff.⁴⁾ Désignons par δ_{m_1} ($m_1=1, 2, 3, \dots$) l'intervalle de Baire d'ordre 1. Nous rangeons les systèmes d'un nombre fini de ces intervalles en une suite déterminée: $\delta_{n_1}^*$ ($n_1=1, 2, 3, \dots$). Supposons qu'on a défini déjà la suite $k-1$ -ple $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}^*$, des systèmes d'un nombre fini des intervalles de Baire d'ordre $k-1$. Nous disons qu'un système des intervalles d'ordre k est un successeur de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}^*$, si tous les intervalles de celui-ci sont contenus dans un des intervalles de celui-là, et si chacun des intervalles de celui-là contient au moins un intervalle de celui-ci. Nous rangeons tous les systèmes-successeurs de $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}^*$ en une suite infinie, et les-désignons par

$$\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}^* \quad (n_k=1, 2, 3, \dots).$$

1) N. Lusin, Sur la classification de M. Baire, C. R. de Paris, t. 164 (1917) p. 93; Sur les ensembles analytiques, Fund. Math. t. X (1927) p. 59; Leçons sur les ensembles analytiques....., Paris, (1930) p. 166.

2) Soit M un ensemble situé dans le plan OXY . Nous disons que la projection de M sur l'axe OX est *uniforme*, si toute droite parallèle à l'axe OY a au plus un point commun avec M .

3) Fund. Math. t. 24, p. 324, Problème 61.

4) Cf. p. ex. F. Hausdorff. Mengenlehre, Berlin u. Leipzig, 1927 et 1935, p. 146; C. Kuratowski, Topologie, Warszawa-Lwow, 1933, p. 89.