15. *Über Automorphismen der lokal-kompakten abelschen Gruppen.*

Von Makoto ABE.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1940.)

Es soll in der vorliegenden Note die Isomorphie von dem Automorphismenring einer lokal-kompakten abelschen Gruppe mit dem ihrer Charaktergruppe gezeigt werden.

Es sei G eine lokal-kompakte (additive) abelsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt; G^* sei die Charaktergruppe mod. 1 von G.[1] Die Gesamtheit der stetigen Homomorphismen von G in sich bildet den Automorphismenring $\mathfrak{R}(G)$ von G. Andererseits besteht die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}(G)$ von G aus allen stetigen *Iso*morphismen von G *auf* sich; diese bildet offenbar die Einheitengruppe des Ringes $\mathfrak{R}(G)$. Wir topologisieren nun G bzw. $\mathfrak{R}(G)$ folgendermaßen: es sei F eine beliebige kompakte Teilmenge von G, U eine beliebige Umgebung der Null in der mod 1 reduzierten Gruppe K der reellen Zahlen bzw. eine beliebige Umgebung der Null in G; wir definieren dann eine Umgebung $V_{G^*}(F, U)$ der Null in G^* bzw. $V_{\mathfrak{R}(G)}(F, U)$ in $\mathfrak{R}(G)$ als Gesamtheit derjenigen Homomorphismen aus G^* bzw. aus $\mathfrak{R}(G)$, welche F in U abbilden. Dadurch wird G^*, ebenso wie G, eine lokal-kompakte abelsche Gruppe, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.[2] $\mathfrak{R}(G)$ wird andererseits ein topologischer Ring; und $\mathfrak{G}(G)$, topologisiert als Teilraum von $\mathfrak{R}(G)$, eine topologische Gruppe.

Es sei nun $x \in G$ und $\alpha \in G^*$; für ein festes x stellt $\alpha(x)$ einen Charakter von G^* dar. Wie L. Pontrjagin und E. R. van Kampen bewiesen haben, läßt sich umgekehrt jeder Charakter von G^* eindeutig in dieser Form ausdrücken[3]; wir können daher G mit der Charaktergruppe von G^* identifizieren. Wegen dieser Dualität zwischen G und G^* schreiben wir jetzt (α, x) statt $\alpha(x)$.

Satz. Für jede lokal-kompakte abelsche Gruppe G, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, und ihre Charaktergruppe G^* sind die Automorphismenringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(G^*)$ topologisch isomorph. Genauer:

Zwischen den Elementen A aus $\mathfrak{R}(G)$ und den Elementen A^* aus $\mathfrak{R}(G^*)$ gibt es eine topologische invers-isomorphe Zuordnung $A \leftrightarrow A^*$, so daß für jedes $x \in G$ und jedes $\alpha \in G^*$

$$(\alpha, Ax) = (A^*\alpha, x) \qquad \textit{gilt.}$$

Beweis. Sind A und α fest gewählt, so definiert (α, Ax) wieder

---

1) Vgl. L. Pontrjagin: Topological groups, Chapter V, Commutative topological groups. Folgende Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall einer lokal-bikompakten (nicht immer separablen) abelschen Gruppe übertragen. Vgl. E. R. van Kampen: Locally bicompact Abelian groups (Annals of Math. (2) **36**, 1935).

2) Pontrjagin: l. c., Theorem 31.

3) Pontrjagin: l. c., Theorem 32.