41. Sur quelques propriétés conformes de V_l dans V_m dans V_n.

Par Kentaro YANO.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 13, 1940.)

§ 1. Soit V_n un espace de Riemann dont la forme quadratique fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu, \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n), \tag{1.1}$$

et les symboles de Christoffel sont

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\omega}(g_{\omega\mu,\nu} + g_{\omega\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\omega}), \tag{1.2}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport aux coordonnées.

Un sous-espace V_m dans V_n peut être défini par les équations paramétriques

$$u^\lambda = u^\lambda(u^{\dot{1}}, u^{\dot{2}}, u^{\dot{3}}, \dots, u^{\dot{m}}), \qquad (m < n). \tag{1.3}$$

Alors, le tenseur fondamental g_{jk} et les symboles de Christoffel $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ de V_m sont respectivement donnés par

$$g_{jk} = B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} g_{\mu\nu}, \tag{1.4}$$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = B^i_{\cdot\lambda}\left(B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + B^{\cdot\lambda}_{j,k}\right), \qquad (i, j, k, \dots = \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dots, \dot{m}) \tag{1.5}$$

où nous avons posé

$$B_j^{\cdot\mu} = \frac{\partial u^\mu}{\partial u^j} \quad \text{et} \quad B^i_{\cdot\lambda} = g^{ij} g_{\lambda\mu} B_j^{\cdot\mu}. \tag{1.6}$$

Cela étant, considérons un sous-espace V_l dans V_m qui est lui-même plongé dans V_n.

Soit

$$u^i = u^i(u^{\ddot{1}}, u^{\ddot{2}}, u^{\ddot{3}}, \dots, u^{\ddot{l}}), \qquad (l < m) \tag{1.7}$$

une représentation paramétrique de V_l. Le tenseur fondamental g_{ab} et les symboles de Christoffel $\left\{ {a \atop bc} \right\}$ de V_l sont repectivement

$$g_{ab} = B_a^{\cdot i} B_b^{\cdot j} g_{ij}, \tag{1.8}$$

$$\left\{ {a \atop bc} \right\} = B^a_{\cdot i}\left(B_b^{\cdot j} B_c^{\cdot k} \left\{ {i \atop jk} \right\} + B^{\cdot i}_{b,c}\right), \qquad (a, b, c \dots = \ddot{1}, \ddot{2}, \ddot{3}, \dots, \ddot{l}) \tag{1.9}$$

où on a posé

$$B_a^{\cdot i} = \frac{\partial u^i}{\partial u^a} \quad \text{et} \quad B^a_{\cdot i} = g^{ab} g_{ij} B_b^{\cdot j}. \tag{1.10}$$

En regardant le sous-espace V_l comme étant plongé dans V_n, on obtient les équations paramétriques de la forme

$$u^\lambda = u^\lambda(u^{\ddot{1}}, u^{\ddot{2}}, \dots, u^{\ddot{l}}). \tag{1.11}$$