31. Eine notwendige Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring.

Von Mikao MORIYA und Yosi KOBAYASI.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1941.)

Herr K. Kubo¹⁾ hat neuerlich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß sich in einem kommutativen Ring $\mathfrak{o}$ jedes vom Einheits- und Nullideal verschiedene Ideal eindeutig als Produkt aus endlich vielen, vom Einheits- und Nullideal verschiedenen Primidealen darstellen läßt. Da die in der Kuboschen Arbeit angeführte Literatur uns nicht so leicht zugänglich ist, so wollen wir in der vorliegenden Note zu zeigen versuchen, wie man mit möglichst elementaren idealtheoretischen Vorkenntnissen seine Resultate erhalten kann. Inzwischen wollen wir auch die von Herrn K. Kubo aufgestellte Bedingung durch die folgende, ihr äquivalente ersetzen, weil die neue Bedingung uns als eine hinreichende Bedingung zweckmäßiger erscheint:

- 1) Es gibt in $\mathfrak{o}$ das Einselement.
- 2) Nur ein nilpotentes Ideal kann das von Null verschiedene annullierende Ideal²⁾ besitzen.
- 3) In $\mathfrak{o}$ gilt der Teilerkettensatz für Ideale.
- 4) Für jedes Primideal³⁾ $\mathfrak{p}$ gibt es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein echtes Zwischenideal.

Voraussetzung.

Ein kommutativer Ring $\mathfrak{o}$ besitze ein vom Einheitsideal $\mathfrak{o}$ und Nullideal (0) verschiedenes Ideal. Ferner sei in $\mathfrak{o}$ jedes von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedene Ideal eindeutig als Produkt von endlich vielen, von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenen Primidealen darstellbar.

Unter dieser Voraussetzung beweisen wir dann folgenden

Hilfssatz. $\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert in $\mathfrak{o}$ ein von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenes Ideal; dieses Ideal besitzt einen von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenen Primteiler $\mathfrak{p}$. Da für ein Element $a \in \mathfrak{p}$ stets $a^2 \notin \mathfrak{p}$ ist, so gilt offenbar:

$$(0) \not\subseteq \mathfrak{o}^2 \subseteq \mathfrak{o}.$$

Wäre nun $\mathfrak{o}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{o}^2$, so bestände nach Voraussetzung folgende Primfaktorzerlegung⁴⁾: $\mathfrak{o}^2 = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$. Hieraus folgte für ein

1) Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen. Journal of Science of the Hiroshima Univ., **10** (1940), 77.

2) Unter dem annullierenden Ideal eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ verstehen wir die Gesamtheit der Elemente γ von $\mathfrak{o}$, für die $\mathfrak{a}(\gamma)$ das Nullideal wird.

3) Wir rechnen $\mathfrak{o}$ unter die Primideale und ebenso das Nullideal, falls es die Primidealeigenschaft besitzt.

4) Unter einem Primfaktor eines Ideals aus $\mathfrak{o}$ verstehen wir stets ein von $\mathfrak{o}$ und (0) verschiedenes Primideal aus $\mathfrak{o}$.