30. *Klassenkörpertheoretische Deutung der Struktur der Klassengruppe des zyklischen Zahlkörpers.*

Von Eizi INABA.

Navy College, Etazima.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1941.)

K sei ein zyklischer Zahlkörper über dem rationalen Zahlkörper R vom Primzahlgrad l. Im Fall $l=2$ haben schon Herren Iyanaga und Reichardt die Rédeischen Resultate über die Struktur der Klassengruppe mittels der Klassenkörpertheorie erklärt[1]. In der vorliegenden Note soll eine Klassenkörpertheoretische Deutung der von mir kürzlich gewonnenen allgemeinen Resultate über die l-Klassengruppe von K erwähnt werden[2]. D sei die Diskriminante von K und t die Anzahl der in D aufgehenden Primzahlen p_i $(i=1, 2, \dots t)$. $K^{(i)}$ sei der eindeutig bestimmbare zyklische Zahlkörper vom Grade l, dessen Diskriminante nur eine einzige Primzahl p_i enthält. Im Fall $p_i \neq l$ ist $K^{(i)}$, wegen $p_i-1\equiv 0 \bmod. l$, der l-gradige Unterkörper des Körpers von p_i-ten Einheitswurzeln. Im Fall $p_i=l$, $l \neq 2$ ist $K^{(i)}$ der l-gradige Unterkôrper des Körpers von l^2-ten Einheitswurzeln. Im Fall $p_i=l=2$ ist $K^{(i)}=R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{2})$ oder $R(\sqrt{-2})$, je nachdem der Quotient von D durch das Produkt der Diskriminanten aller $K^{(i)}$ $(p_i \neq 2)$ gleich -4, 8 oder -8 ist. *Die Menge $\mathfrak{M}_1$ aller im Kompositum Ω von $K^{(i)}$ $(i=1, 2, \dots t)$ enthaltenen l-gradigen zyklischen Zahlkörper, K ausgeschlossen, heisse ein Körpersystem erster Stufe. Zwei Körper K_1, K_2 aus $\mathfrak{M}_1$ heissen assoziert, im Zeichen $K_1 \sim K_2$, wenn das Kompositum KK_1 den K_2 enthält.* Offenbar gilt $K_1 \sim K_1$; aus $K_1 \sim K_2$ folgt $K_2 \sim K_1$, und aus $K_1 \sim K_2$, $K_2 \sim K_3$ folgt $K_1 \sim K_3$. *Die Menge aller zu K_1 assozierten Körper aus $\mathfrak{M}_1$ heisse die K_1 enthaltende Körperklasse erster Stufe und werde mit (K_1) bezeichnet. Die Körperklassen (K_i) $(i=1, 2, \dots m)$ heissen ferner voneinander unabhängig, wenn keine (K_j) im Kompositum $KK_1K_2 \dots K_{j-1}K_{j+1} \dots K_m$ enthalten wird.*

Sei G die absolute Klassengruppe von K und H die Gruppe aller Klassen, deren Ordnungen zu l prim sind. Die Quotientengruppe $\bar{G}=G/H$ wird durch die Klassen aus der l-Klassengruppe repräsentiert und ist isomorph mit dieser. Die l-Klassengruppe, folglich auch $\bar{G}$, ist als direktes Produkt der durch Klassen $C_i^{(\nu)}$ von Ordnungen $(1-\sigma)^\nu$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\nu;\ \nu=1, 2, \dots s)$ erzeugten Gruppen darstellbar[3].

Es ist nämlich

$$\bar{G} \cong \{C_1^{(1)}\}\{C_2^{(1)}\} \cdots \{C_{\lambda_1}^{(1)}\}\{C_1^{(2)}\} \cdots \{C_{\lambda_s}^{(s)}\}$$

---

1) Vgl. S. Iyanaga, Sur les classes d'ideaux dans les corps quadratiques (Actualités scientifiques et industrielles 197) und H. Reichardt, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. Math. **170** (1933).

2) Vgl. E. Inaba, Über die Struktur der l-Klassengruppe zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrad l, Journ. Fac. Sci., Tokyo, (1), **4** (1940), 61–115.

3) Vgl. E. Inaba l. c. Kapitel I.