

73. Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfssatzes.

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 13, 1942.)

1. Herr Unkelbach¹⁾ hat die Verschärfung des sogenannten Löwnerschen Hilfssatzes bewiesen, welche besagt:

Bildet die Funktion $w=f(z)$ mit $f(o)=0$ und $f'(o)>0$ den Einheitskreis $|z|<1$ konform auf ein innerhalb des Einheitskreises $|w|<1$ enthaltenes Gebiet ab, derart, daß ein Bogen der Länge l des Kreises $|z|=1$ in stetiger Weise auf einen Bogen der Länge L des Kreises $|w|=1$ übergeht, so gilt die Ungleichung

$$L \geq \frac{2}{1+f'(o)} l.$$

2. Wenn wir nur die schlichte Abbildung behandeln wollen, dann dürfen wir offenbar die Betrachtungen auf die beschränkte Schlitzabbildung

$$w_t=f(z, t)=e^{-t}(z+\dots), \quad f'(o, t)=e^{-t},$$

beschränken. Die diese Abbildungsfunktion erzeugende Löwnersche Differentialgleichung sei

$$(1) \quad \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} = -f(z, \tau) \frac{1+\kappa(\tau)f(z, \tau)}{1-\kappa(\tau)f(z, \tau)}, \quad \kappa(\tau)=e^{i\theta(\tau)}, \quad (0 \leq \tau \leq t)$$

und die Bildpunkte von $z=e^{i\alpha}$ auf dem betreffenden Bogen

$$\alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2$$

durch die Abbildungen $w_\tau=f(z, \tau)$ seien $e^{i\varphi(\alpha, \tau)}$. Wie wir in der früheren Note²⁾ gesehen haben, gilt dann die Beziehung

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi(\alpha, \tau)}{\partial \tau} = -\cot \frac{\theta(\tau)+\varphi(\alpha, \tau)}{2}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad (\varphi(\alpha, 0)=\alpha)$$

und dabei genügt die Funktion $\theta(\tau)$ der Ungleichungen

$$-\varphi(\alpha_1, \tau) < \theta(\tau) < 2\pi - \varphi(\alpha_2, \tau).$$

Aus den auch in der oben zitierten Note bewiesenen Beziehungen

1) H. Unkelbach, Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, Math. Zeitschr. **43**, 1938, 739–742. Er sagt darin vor, daß in seiner demnächst erscheinenden Arbeit eine weitere Verschärfung für schlichte Abbildungen angegeben wird.

2) Y. Komatu, Über das Randverhalten beschränkter Schlitzabbildungen und seine Anwendungen, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, **24**, 1942, 187–197.