86. Sur les anneaux des opérateurs, I.

Par Masae ORIHARA.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1944.)

Dans leurs mémoires importantes[1], MM. F. J. Murray et J. v. Neumann ont recherchés des anneaux des opérateurs linéaires et bornés sur l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$. D'après ceux-ci, quand un anneau $\mathcal{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{H}$ est un facteur, nous pouvons définir une dimension numérique pour les sous-espaces $\mathfrak{M}$ linéaires et fermés tels qu'on ait $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, et le classifier en les cinq types I_n, I_∞, II_1, II_∞ et III_∞ à ce point. De plus, au grâce de celle-ci nous pouvons definir la trace pour les facteurs de type I_n ou bien II_1.

Cependant, d'après l'idée de M. S. Banach sur l'existence des fonctionnelles linéaires, nous pouvons, donner d'abord la trace sur les facteurs et puis la dimension numérique. Dans cette methode, il n'est pas necéssaire de supposer que $\mathfrak{H}$ soit séparable et que $\mathcal{M}$ soit un facteur. Le but de cette note est de rechércher la structure des anneaux des opérateurs de $\mathfrak{H}$ sur ce point.

§ **1.** Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien général (il n'est pas nécessairement séparable), et $\mathcal{B}$ l'ensemble tous les opérateurs linéaires et bornés sur $\mathfrak{H}$.

Quand un sous-ensemble $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ satisfait aux conditions suivantes,

(1) quelques soient A, B de $\mathcal{M}$, $A \pm B$, AB, A^*, αA (α est un nombre complexe) appartiennent à $\mathcal{M}$,

(2) l'opérateur unité I appartient à $\mathcal{M}$,

(3) $\mathcal{M}$ est faiblement fermé,

nous l'appelons un anneau des opérateurs.

Etant donné un anneau $\mathcal{M}$ des opérateurs, nous désignons par $\mathcal{M}'$ l'ensemble de tous les opérateurs A de $\mathcal{B}$ tels que A et A^* soient en même temps commutatifs avec chaque élément de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^H$ celui de tous les opérateurs hermitiens de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^U$ celui de tous les opérateurs unitaires et $\mathcal{M}^P$ celui de tous les opérateurs projectifs.

Puis, si l'on a $(Af, f) \geqq 0$ pour tous les éléments f de $\mathfrak{H}$, où A est un élément de $\mathcal{M}^H$, on pose $A \geqq 0$, et si l'on a $A - B \geqq 0$, on pose $A \geqq B$ ou bien $B \leqq A$. Si l'on a $A \geqq 0$ et on n'a pas $A = 0$, on pose $A > 0$. Nous avons alors

(1) $\mathcal{M}^H$ est un système demi-ordonné par rapport à la relation $\geqq$, c'est-à-dire, (α) $A \geqq B$ et $B \geqq A$ entrainent $A = B$, (β) $A \geqq B$ et $B \geqq C$ entrainent $A \geqq C$,

(2) $A \geqq 0$ et $B \geqq 0$ entrainent $A + B \geqq 0$,

(3) si l'on a $A \geqq B$, on a $aA \geqq aB$ ou bien $aA \leqq aB$ suivant a est un nombre non-negatif ou bien non-positif,

---

1) F. J. Murray and J. v. Neumann, On Rings of Operators, Annals of Math. **37** (1936); On Rings of Operators II, Trans. of Amer. Math. Soc. **41** (1937); J. v. Neumann, On Rings of Operators III, Annals of Math. **41** (1940).