# PAPERS COMMUNICATED

## 85. *Les anneaux des opérateurs et les dimensions.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1944.)

Quand nous envisageons les anneaux des opérateurs d'un espace linéaire normé et complet, nous trouvons les diverses problèmes très importants et un de ceux est d'introduire la notion des dimensions sur les anneaux des opérateurs. L'importance de ce problème est au premier enoncé pour l'espace hilbertien par MM. J. v. Neumann et F. J. Murray[1] et il est résolu complétement par eux pour ce cas. Or, ce problème est encore pour le cas général ouvert et donc nous le discutons dans cette note.

**1.** Etant donné un espace $\mathfrak{B}$ linéaire, normé et complet, nous désignons par $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires et définis sur $\mathfrak{B}$ tout entier, et nous introduissons sur celui-ci quelques topologies, par exemple, celle uniforme, celle forte, celle faible, etc..... Quand un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ remplit les conditions suivantes:

1) l'opérateur identique I appartient à $\mathcal{M}$,
2) pour deux opérateurs $A$ et $B$ de $\mathcal{M}$, $\alpha A+\beta B$, où $\alpha$ et $\beta$ désignent les nombres, et $AB$ appartinnent aussi à $\mathcal{M}$,
3) $\mathcal{M}$ est fermé par rapport à quelque topologie,

nous l'appelons un anneau des opérateurs sur $\mathfrak{B}$. En particulier, quand tous les opérateurs de $\mathcal{M}$ sont bornés, nous dirons qu'il est borné et sinon, qu'il est non borné. Nous désignons alors par $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$. Il est évidemment un anneau borné des opérateurs.

**2.** Etant donné un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{B})$, nous désignons par $\mathcal{M}'$ (et $\mathcal{M}^0$) l'ensemble de tous les opérateurs $A$ de $\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ $\big($et $\mathcal{O}(\mathfrak{B})\big)$ tels qu'on ait $AX=XA$ pour tout $X$ de $\mathcal{M}$, et nous les appelons le commutateur borné (celui non borné) de $\mathcal{M}$.

(2.1) $\mathcal{M}'=\mathcal{M}^0\frown\mathcal{R}(\mathfrak{B})$ et donc $\mathcal{M}'\leqq\mathcal{M}^0$.

(2.2) $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}^0$ sont respectivement l'anneau borné et celui non borné par rapport à la topologie faible.

(2.3) $\mathcal{M}\leqq\mathcal{N}\leqq\mathcal{O}(\mathfrak{B})$ entraine $\mathcal{N}'\leqq\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}^0\leqq\mathcal{M}^0$.

(2.4) Quand nous posons $\mathcal{M}''=(\mathcal{M}')'$, $\mathcal{M}'''=(\mathcal{M}'')'$, ..., $\mathcal{M}^{(n+1)}=(\mathcal{M}^{(n)})'$ ..., et $\mathcal{M}^{00}=(\mathcal{M}^0)^0$, $\mathcal{M}^{000}=(\mathcal{M}^{00})^0$, ..., $\mathcal{M}^{[n+1]}=(\mathcal{M}^{[n]})^0$, nous avons $\mathcal{M}'=\mathcal{M}^{(2n+1)}$, $\mathcal{M}''=\mathcal{M}^{(2n)}$, $\mathcal{M}^0=\mathcal{M}^{[2n+1]}$ et $\mathcal{M}^{00}=\mathcal{M}^{[2n]}$.

---

1) J. v. Neumann et F. J. Murray, On rings of operators, Ann. Math., **37** (1936).