Idéaux réduits, nombres réduits et équation $D = y^2 + 4xz$

Par Pierre KAPLAN

Département de Mathématiques, Université de Nancy I, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1998)

§1. Introduction. Dans ce travail les lettres latines $D, a, b, c, \ldots, u, v, x, y, z, \ldots$, désigneront toujours des entiers, éléments de l'ensemble $\boldsymbol{Z}$, et l'expression $(x, y, z) = 1$ signifie que x, y et z n'ont pas de diviseur commun. Si λ est un nombre réel sa partie entière sera désignée par $[\lambda]$.

Soit D un discriminant positif, c'est-à-dire un entier positif non carré congru à 0 ou 1 modulo 4 : nous ne supposons pas que D soit fondamental. Nous considérons d'une part l'ensemble fini $S(D)$ des solutions (x, y, z) de l'équation

$$(1.1)\quad D = y^2 + 4xz,\ (x, y, z) = 1,\quad x > 0,\ |y| < \sqrt{D},$$

d'où $z > 0$, et d'autre part les idéaux et nombres 0-réduits et 1-réduits de discriminant D dont les définitions précises seront rappelées plus bas ; les nombres 1-réduits sont les nombres quadratiques dont le développement en fraction continue ordinaire est purement périodique, les nombres 0-réduits sont ceux dont le développement en fraction continue à l'entier supérieur est purement périodique. Nous noterons $s(D)$ le cardinal de l'ensemble $S(D)$ et $r_0(D)$ le cardinal de l'ensemble des idéaux ou des nombres 0-réduits de discriminant D.

Le but de ce travail est de démontrer de manière simple les résultats suivants :

Théorème 1. $s(D) = 2r_0(D)$,

Théorème 2. $s(D) = \sum_{\varphi\ 0\text{-réduit de discriminant } D} [\varphi]$,

Théorème 3. $s(D) = 2 \sum_{\varphi\ 1\text{-réduit de discriminant } D} [\varphi]$,

Théorème 4. $r_0(D) = \sum_{\varphi\ 1\text{-réduit de discriminant } D} [\varphi]$,

et les résultats analogues, Théorèmes 5, 6, 7 et 8, que l'on obtient en se limitant à une classe d'idéaux.

Pour démontrer les Théorèmes 1 à 4 (§2) et les Théorèmes 5 à 8 (§3) nous utilisons les définitions des nombres et idéaux 0-réduits et 1-réduits et leurs propriétés les plus simples, mais ne faisons pas appel aux théories des fractions continues. Dans une dernière partie (§4) nous expliquons rapidement comment on peut retrouver une partie de ces résultats à partir des théories des fractions continues, en citant des travaux antérieurs où ceci est partiellement réalisé.

Les résultats nouveaux de ce travail sont les Théorèmes 2 et 6, mais il n'est pas certain que l'on puisse trouver dans la littérature une démonstration complète des autres. Et, pour parler comme Gauss, nous espérons que la théorie simple qui suit ne déplaira pas à quelques lecteurs.

§2. Idéaux et nombres 0-réduits et 1-réduits de discriminant D. L'ordre O_D de discriminant D est le $\boldsymbol{Z}$-module $\left[1, \dfrac{D+\sqrt{D}}{2}\right]$, où $[\alpha, \beta]$ désigne le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par α et β. Les idéaux primitifs de l'ordre O_D sont les $\boldsymbol{Z}$-modules $\left[a, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right]$ tels que

$$(2.1)\quad a > 0,\ \frac{D-b^2}{4a} = c \in \boldsymbol{Z},\ (a, b, c) = 1.$$

Le nombre a est la norme de l'idéal I. Posons $\varphi = \dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}$. La classe de φ modulo 1 est déterminée par I et, inversement, le nombre φ détermine l'idéal I. On dit que I et φ sont associés, et on écrit $I = I(\varphi)$, ce qui signifie que

$$(2.2)\qquad I = a[1, \varphi],\ \varphi = \frac{b+\sqrt{D}}{2a},$$

où a et b vérifient (2.1). Si a et b vérifient (2.1) on dit que le discriminant de l'idéal I et du nombre φ définis par (2.2) est D. Deux nombres ou deux idéaux équivalents ont le même discriminant. Dans tout ce travail, le mot 《idéal》 signifiera 《idéal de discriminant D》, les lettres φ et ω désigneront des nombres de discriminant D et nous noterons $\bar{\varphi}$ le conjugué $\bar{\varphi} = \dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}$ de $\varphi = \dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}$. Nous désignerons par $S_0(D)$ l'ensemble des nombres $\omega = \dfrac{y+\sqrt{D}}{2x}$ où