Corps linéairement compacts discrets

By Mohamed TABAÂ

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc

(Communicated by Shokichi IYANAGA M. J. A., Sept. 12, 1995)

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires.

Une topologie linéaire sur un module est dite linéairement compacte si elle est séparée et si toute base de filtre formée de variétés linéaires affines admet au moins un point adhérent.

Nous cherchons à déterminer les anneaux intègres dont le corps des fractions est linéairement compact pour la topologie discrète. L'importance de ces anneaux a été soulignée par Vámos dans [14]. On connaît essentiellement deux types de tels anneaux: les anneaux de valuation maximaux [8] et les anneaux locaux noethériens complets de dimension 1 [2]. Dans cette Note nous obtenons une caractérisation de ces anneaux, et donnons quelques exemples.

Dans toute la suite A désigne un anneau intègre, K son corps des fractions et A' sa clôture intégrale.

Lemme 1. *On suppose que A est intégralement clos. Si A est un anneau local et si, pour tout anneau de valuation de K dominant A, K est A-linéairement compact pour la topologie définie par cet anneau, alors A est un anneau de valuation.*

Preuve. La démonstration du lemme de [12] montre que la propriété 7) du théorème 19.15 de [5] est vérifiée pour A, d'où le lemme.

On en déduit le

Corollaire 1 ([6, th. 2], [14, prop. 2.11]). *Si K est A-linéairement compact pour la topologie discrète, alors A' est un anneau de valuation.*

Preuve. L'anneau A' est linéairement compact pour la topologie discrète, il résulte donc de [3, chap. 3 §2 exer. 21 c)] que A' est local; le résultat découle alors du lemme précédent.

Dans [16, section 4], Wiseman montre, sur quelques exemples, que le type d'anneau intègre linéairement compact pour la topologie discrète peut être déterminé en considérant sa clôture intégrale; dans ce sens on a la

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) *K est A-linéairement compact pour la topologie discrète.*

2) *A' est un anneau de valuation A-linéairement compact pour la topologie discrète.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2). La première assertion découle du corollaire 1 et la seconde est claire.

2) $\Rightarrow$ 1). A' est un anneau de valuation linéairement compact pour la topologie discrète, donc, d'après [4, prop. 10. 10], K est A'-linéairement compact pour la topologie discrète. L'implication résulte alors de [16, lemme 1.5] puisque, en vertu de [1, cor. 9], l'anneau A a la dualité.

Dans la proposition précédente la propriété 2) ne peut pas être remplacée par "A' est un anneau de valuation maximal". On prend $A = \boldsymbol{Q} + X\bar{\boldsymbol{Q}}[[X]]$ où $\bar{\boldsymbol{Q}}$ est une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}$. A est un anneau intègre local d'idéal maximal $X\bar{\boldsymbol{Q}}[[X]]$ et de corps des fractions $\bar{\boldsymbol{Q}}((X))$; sa clôture intégrale $A' = \bar{\boldsymbol{Q}}[[X]]$ est un anneau de valuation discrète complet donc un anneau de valuation maximal; mais A' n'est pas A-linéairement compact pour la topologie discrète; sinon, d'après [3, chap. 3 §2 exer. 15 c)], le corps résiduel $\kappa_{A'} = \bar{\boldsymbol{Q}}$ de A' serait A-linéairement compact pour la topologie discrète; et par suite, en vertu de [3, chap. 3 §2 exer. 20 a)], serait de rang fini sur $\kappa_A = \boldsymbol{Q}$.

On désigne par $\mathfrak{f} = Ann_A(A'/A)$ le conducteur de A dans A'.

Corollaire 2. *Si $\mathfrak{f} \neq 0$, A est linéairement compact pour la topologie discrète et A' est un anneau de valuation alors K est A-linéairement compact pour la topologie discrète.*

Preuve. Soit $d \in \mathfrak{f}$, $d \neq 0$. On a $dA' \subset A$, donc dA' est A-linéairement compact pour la topologie discrète et par suite A' est A-linéairement compact pour cette topologie. Le corollaire découle alors de la proposition 1.

Un anneau intègre est dit *complètement réflexif* si tout module réduit sans torsion de rang fini est réflexif, et il est dit un D-anneau si tout mod-