10. *Quelques exemples d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques doubles*

Par Susumu TANABÉ
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tokyo

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Feb. 13, 1989)

§ 1. Énoncés des résultats. Le but de cet article est la démonstration de l'hypoellipticité de l'opérateur qui est un opérateur perturbé d'un opérateur non-hypoelliptique. Nous partons du résultat suivant.

Théorème 1 (A. Gilioli, F. Trèves [1] et A. Menikoff [5]). *Soit $P(t, x, D_t, D_x)$ un opérateur de la forme*:

(A): $$P=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x$$

où k est un entier positif quelconque, $(t, x)\in R^2, D_t=\partial/i\partial t$, $D_x=\partial/i\partial x$. b: constante.

P est microlocalement hypoelliptique C^∞ ainsi qu'hypoelliptique analytique au voisinage de $p=\{(t, x, \tau, \xi)\,;\ t=\tau=0,\ \xi=1\}\in T^*R^2$ si et seulement si:

$$b\notin\{2(k+1)Z_+\}\cup\{2(k+1)Z_++2\}$$

(resp. $\notin 2(k+1)Z+1$) *pour k impair* (resp. *pair*). $Z_+=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

Notre résultat principal est le Théorème suivant.

Théorème 2. (i) *Soit P' un opérateur de la forme*: $P'=ct^{k+r}D_x$, *où r est un entier positif tel que $0\leqslant r\leqslant k$.*

(ii) *Soit P'' un opérateur de la forme*: $P''=ct^{k+r}|D_x|^{3/2}$, *où r est un entier positif tel que $(k-1)/2<r\leqslant k$.*

Pour ces deux cas c est constante.

Soient les opérateurs (B) *et* (C) *comme ci-dessous*:

(B): $$P+P'=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x+ct^{k+r}D_x$$

(C): $$P+P''=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x+ct^{k+r}|D_x|^{3/2}$$

où $b=0$ (resp. $b=1$) *dans le cas où k est impair* (resp. *pair*).

Dans ces deux cas (B) *et* (C) *sont hypoelliptiques C^∞ et hypoelliptiques analytiques au voisinage de l'origine si et seulement si c n'est pas nul.*

Remarque 1. V. V. Grushin [3] a trouvé le phénomène du rétablissement d'hypoellipticité (Théorème 2, cas i, le cas où $k=1$ et $r=1$), et K. H. Kwon [4] a assuré ce phénomène dans le cas où $k=1$ et r est un impair quelconque.

Remarque 2. On déduit de la démonstration ci-dessous que si k et r sont impairs (resp. pairs), et $b/2\in\{(k+1)Z_++1\}\cup\{k+1)Z_+\}$ (resp. $\in(k+1)\cdot Z+(1/2)$) alors Théorème 2 est également valable.

§ 2. Préparation à la demonstration du Théorème 2. Soit $u(t, x)$ une solution de $P\ u(t, x)=0$. On a la transformation de Fourier de l'opérateur (B) par rapport à x;