# 102. Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. II

Par H. CHARRIÈRE
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Nov. 12, 1987)

Cette note fait suite à [1]. On utilisera les mêmes notations.

4) **Exemple d'application à la perturbation des conditions au bord.** Soit l'équation $u_{tt}-u_{xx}=0$, où $t$ et $x$ sont des variables réelles. La solution $u$ dont les conditions initiales relatives à $t$ sont $u(0,x)=u_0$ *et* $u_t(0,x)=u_1$ s'écrit:

$$u=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}u_1+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}u_0$$

où $\boldsymbol{E}$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(1/2)\int_{-t}^{+t}f(t,v)dv$

et $\boldsymbol{E}_t$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(1/2)(f(t,t)+f(t,-t))$.

La solution $u$, dont les conditions initiales relatives à $x$ sont $u(t,0)=b_0$ et $u_x(t,0)=b_1$ s'écrit:

$$u=\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1+\boldsymbol{F}_x\underset{t}{\ast}b_0$$

où $\boldsymbol{F}$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(-1/2)\int_{-x}^{+x}f(v,x)dv$

et $\boldsymbol{F}_x$ est l'opérateur $f(t,x)\longmapsto(-1/2)(f(x,x)+f(-x,x))$.

$\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_x$ sont des solutions de l'équation $u_{tt}-u_{xx}=0$ et admettent donc la décomposition suivante, qui permet le "changement de base":

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F})\\ \boldsymbol{F}_x=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_{xt})+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_x)\\ \quad=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}\partial\delta_{(t,0)}/\partial x\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}\partial\delta_{(t,0)}/\partial x\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}).\end{cases}$$

On considère maintenant les quatre conditions au bord:

$(cb+)$: $u(t,0)=0\quad\forall t\geq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=0\quad\forall t\geq 0$

$(cb-)$: $u(t,0)=0\quad\forall t\leq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=0\quad\forall t\leq 0$

$(cbp+)$: $u(t,0)=u_x(t,0)\quad\forall t\geq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=b_1(t)\quad\forall t\geq 0$

$(cbp-)$: $u(t,0)=u_x(t,0)\quad\forall t\leq 0\Longleftrightarrow b_0(t)=b_1(t)\quad\forall t\leq 0$

Désignons par $b_1^+$, $b_1^-$, $b_1^{p+}$, $b_1^{p-}$ la fonction $u_x(t,0)$ dans ces quatre situations. La solution $u$ prend les valeurs correspondantes:

$$u^*=\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1^*=(\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}))\underset{t}{\ast}b_1^*$$
$$=\boldsymbol{E}\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}_t\underset{t}{\ast}b_1^*)+\boldsymbol{E}_t\underset{x}{\ast}(1\underset{t}{\ast}\boldsymbol{F}\underset{t}{\ast}b_1^*)$$

où $*$ désigne successivement $+$ et $-$,