4. *Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules).* III

Par Marc KRASNER*) et Mirjana VUKOVIĆ**)

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Jan. 12, 1987)

Anneaux paragraduées. Soient $(A\,;x+y,\ xy)$ un anneau (pas forcément associatif), et $\pi:\Delta\to Sg(A)$ une paragraduation de son groupe additif $(A\,;x+y)$. L'application π est dite une *paragraduation d'anneau* de $(A\,;x+y,\ xy)$ si, pour tous $\xi,\eta\in\Delta$ existe un ζ tel que $A_\xi A_\eta\subseteq A_\zeta$ (où $A_\delta=\pi\cdot\delta$) et l'anneau $(A\,;x+y,\ xy)$ muni de π est dit un *anneau paragradué*. Une application $(\xi,\eta)\to\xi\eta$ de $\Delta\times\Delta$ dans Δ est dite un *multiplication* (ou *composition*) des grades (pour π) si :

1) pour tous ζ,η, on a $A_\xi A_\eta\subseteq A_{\xi\eta}$;

2) pour tous $\xi,\xi',\eta,\eta'\in\Delta$, $\xi\leqslant\xi'$ et $\eta\leqslant\eta'$ impliquent $\xi\eta\leqslant\xi'\eta'$.

La multiplication $\xi\eta=\mathrm{Sup}\,\{\delta(xy)\,;\,x,y\in H,\ \delta(x)=\xi,\ \delta(y)=\eta\}$, où H est la partie homogène de $(A\,;x+y)$ pour π est définie et satisfait aux conditions 1) et 2). Elle s'appelle la multiplication *minimale* des grades (pour π). Une paragraduation π de $(A\,;x+y,\ xy)$ est dite *propre* si elle l'est en tant que paragraduation de $(A\,;x+y)$ et si elle est munie de la multiplication minimale de ses grades. Si π est une extragraduation de $(A\,;x+y)$ elle en est dite une de $(A\,;x+y,\ xy)$, qui est dit un *anneau extragradué*.

On montre que l'existence, pour tous $\xi,\eta\in\Delta$, d'un $\zeta\in\Delta$ tel que $A_\xi A_\eta\subseteq A_\zeta$ équivaut à deux conditions :

(I) $H\subseteq H$;

(II) Si $x,x',y,y'\in H$ sont tels que $x+x',\ y+y'\in H$, on a $xy+x'y'\in H$. (Contrairement au cas des anneaux gradués, (II) n'est pas une conséquence de (I)). Donc, du point de vue semi-homogène, le couple $(A=(A\,;x+y,\ xy),\ H\subseteq A)$ est un anneau paragradué ssi, en posant $H(x)=\{y\in H\,;\,x+y\in H\}$ $(x\in H)$, on a :

1°) Si $a\in H$, $A(a)=\{x\in H\,;\,H(x)\supseteq H(a)\}$ est un sous-groupe de $(A\,;x+y)$;

2°) Si $A\subseteq H$ est tel que $A+A\subseteq H$, il existe un sous-groupe $g\subseteq H$ de $(A\,;x+y)$, qui est fortement saturé et tel que $A\subseteq g$;

3°) H engendre le groupe *abélien* $(A\,;x+y)$ avec le système des relations $x+y=z$, où $x,y,z\in H$ et on a $x+y=z$ dans $(A\,;x+y)$;

4°) $H^2\subseteq H$;

5°) Si $x,x',\ y,y'\in H$, $x+x'\in H$ et $y+y'\in H$ impliquent $xy+x'y'\in H$.

Il est clair quand (G,H) est un anneau extragradué.

*) Professeur émérite de l'Université de Paris VI. Décédé le 13 mai 1985 à l'âge de 73 ans.

**) Prirodno-matematički fakultet (Odsjek za matematiku) Vojvode Putnika 43/IV, 71000 Sarajevo, Jougoslavie.