64. *Sur la notion de fonction multiplicative et quelques problèmes qui lui sont associés*

By Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1985)

1. En théorie probabiliste des nombres, une fonction multiplicative est une application $f: \boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{C}$ vérifiant $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ quand $(m,n)=1$. On a énoncé dans [5] des résultats relatifs à des fonctions de ce type, déduits du comportement de certaines séries de Dirichlet qui leur sont naturellement associées, soulignant que ce genre de question ne relève que de méthodes de théorie de la mesure appliquée congrûment sur les espaces idoines. On élargit ici le sujet.

2. **Généralisation de quelques concepts classiques.** Soit T_u, $u \in \boldsymbol{N}^*$, une famille dénombrable d'ensembles dénombrables. Pour un u fixé, on considère une application $N: T_u \to [1, +\infty[$, définie par $t_u^{(n)} \to N(t_u^{(n)})$ et *l'on supposera pour simplifier l'exposé*, que l'on a $N(t_u^{(n)})=N(t_u^{(1)})^n$, $N(t_u^{(0)})=1$, $N(t_u^{(1)})>1$. Si t_u est un élément générique de T_u, il s'écrit $t_u^{(n)}$ et l'on définit la valuation v_u de t_u par $v_u(t_u)=n$ si $t_u=t_u^{(n)}$; ce qui nous permet d'écrire $t_u=t_u^{v_u(t_u)}$; on a $v_u(t_u^{(0)})=0$.

Soit Λ l'ensemble défini par $\Lambda=\{\lambda=(t_u)_{u\in N^*} \mid \sum_u v_u(t_u)<+\infty\}$. Λ est l'ensemble des éléments de $T=\prod_u T_u$ dont les composantes t_u sont égales à $t_u^{(0)}$, sauf pour un nombre fini de u. On notera par $v_u(\lambda)$, la valuation sur u de λ où λ est un élément de Λ, l'entier défini par $v_u(\lambda)=v_u$ (projection de λ sur T_u).

Soit $\lambda \in \Lambda$. Alors, l'expression $N(\lambda)=\prod_u N(t_u^{(1)})^{v_u(\lambda)}$ a un sens, et l'on considère l'expression formelle

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{N(\lambda)^s}, \qquad s \in \boldsymbol{C}.$$

On va supposer que pour $\operatorname{Re} s > s_0 > 0$, cette série converge; on notera $\zeta_T(s)$ sa somme, et on supposera aussi que son abscisse de convergence ρ est strictement positive; quitte à effectuer l'homothétie $s \to \rho s$, on peut supposer que ρ est égale à 1, ce que l'on fera donc. On a donc défini ainsi une fonction ζ_T, la fonction Zêta de Λ, d'abscisse de convergence 1. De même que dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on peut écrire que, pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta_T(s)=\prod_u \frac{1}{1-\dfrac{1}{N(t_u^{(1)})^s}}.$$

On remarque maintenant que, quitte à réordonner la suite $u \to N(t_u^{(1)})$, indexée par u, on peut supposer que $N(t_u^{(1)})$, $u \in \boldsymbol{N}^*$, est croissante au sens