52. Sur la théorie des suites presque-périodiques. II

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
Centre National de la Recherche Scientifique, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., June 11, 1985)

On poursuit ici l'exposé de résultats commencé dans la note I de même titre.

8. Soit f un élément de $B.p.p.$ et F un élément de $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$ qui lui est associé (par l'isométrie décrite dans le théorème 2 de (I)). Il est connu que l'on peut construire une suite de polynômes de Bochner-Fejer $\mathcal{K}_\nu$ telle que: $F*\mathcal{K}_\nu$ tend vers F dans $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$, ([1]), $*$ représentant l'opérateur de convolution. En terme de $B.p.p.$, ceci s'énonce: il existe une suite de polynômes trigonométriques à fréquences appartenant à l'ensemble des fréquences de f, qui tend vers f dans $B.p.p.$

Un examen de la méthode pour établir ce résultat montre qu'elle se ramène en fait à considérer G_f, le groupe associé à f (voir (I)-3), et le dual de G_f, $\hat{G}_f$, qui s'identifie à $\oplus_{\lambda\in\Lambda(f)} \boldsymbol{Z}\lambda$, de plonger $\hat{G}_f$ dans $\oplus_{\lambda\in\Lambda(f)} \boldsymbol{Q}\lambda$ dont on extrait une base dénombrable C. A C, on associe $K_C=\prod_{\gamma\in C} P_\gamma$, où P_γ est le dual de $\boldsymbol{Q}_\gamma$, compact, et K_C est aussi compact. Dans K_C, on approche la fonction caractéristique d'une suite de voisinages de l'élément neutre, décroissante, par des polynômes de Bochner-Fejer; on régularise F par le moyen de cette suite d'approximations, et il est connu que la suite des régularisées converge vers F dans $\mathcal{L}(K_C, dm_{K_C})$ ([2]), (dm_{K_C} étant la mesure de Haar induite sur K_C par dm), ce qui en fait revient à une convergence dans $\mathcal{L}(\bar{Z}, dm)$.

Le fait que $G=\prod_p \boldsymbol{Z}_p$ soit profini permet d'améliorer nettement la procédure; en effet, à toute suite de voisinages ouverts et fermés de l'élément neutre correspond une suite de polynômes trigonométriques, qui sont les fonctions caractéristiques de ces voisinages, et le fait de régulariser par les fonctions caractéristiques d'une suite décroissante de tels voisinages va définir une martingale sur $\mathcal{L}(G, dm_G)$. Comme on l'a déjà vu, ([3], par exemple), les suites de $B.p.p.$ associées à $\mathcal{L}(G, dm_G)$ sont les suites limite-périodiques. D'où, par exemple:

Théorème 8. *Soit f une suite limite-périodique, et N_k une suite d'entiers vérifiant:*

(a) *N_k divise N_{k+1}, ($k\in N^*$),*

(b) *Pour tout p premier, $\lim_{k\to+\infty} v_p(N_k)=+\infty$, où v_p est la p-valuation.*

Soit alors t un élément de G; on définit t_k par: t_k est le seul entier vérifiant

$$0\le t_k<N_{k+1},$$