48. *Sommes de Gauss modulo p^a. II*

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1983)

On traite ici le cas où $p=2$. On a

Théorème 2. *χ ètant un caractère primitif modulo 2^α, on note $\tau(\chi)$ la somme de Gauss modulo 2^α définie par*

$$\tau(\chi)=\sum_{x\in(Z/2^\alpha Z)^*}\chi(x)\exp\left(2i\pi\frac{x}{2^\alpha}\right).$$

Alors

1. *Si $\alpha=2k$, on définit h par $\chi(1+2^k)=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{2^k}\right)$, $0<h<2^k$;*

alors, pour tout $L\equiv h \bmod 2^k$, on a

$$\tau(\chi)=2^k\cdot\chi(L)\exp\left(2i\pi\frac{L}{2^{2k}}\right).$$

2. *Si $\alpha=2k+1$, $k\geq 2$, soit h l'unique entier vérifiant*

$$\chi(1+2^k+2^{2k-1})=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{2^{k+1}}\right),\qquad 0<h<2^{k+1};$$

h s'écrit en base 2 sous la forme $h=h_1+u2^k$ ($u=0$ ou 1) où

$$h_1=\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon_i 2^i,\quad \varepsilon_i\in\{0,1\},\quad i=0,1,\cdots,k-1.$$

h_1 et u sont déterminés de façon unique. Alors, on a

$$\tau(\chi)=2^k\cdot\chi(h_1)\exp\left(2i\pi\frac{h_1}{2^{2k+1}}\right)\cdot(1-\exp(i\pi(u+h/2))).$$

Preuve. Le cas 1 du théorème 2 a été établi dans la partie I (Voir [1]); il ne reste donc qu'à considérer le cas 2. On laisse de côté le cas $k=1$ qui se traite par un calcul direct. Supposons donc $k\geq 2$.

En utilisant les mêmes notations et méthodes qu'en [1], on vérifie que $\hat{\Gamma}_{k+1}$ est composé des ψ_h, $0\leq h\leq 2^{k+1}-1$, définis par

$$\psi_h(1+2^k m)=\exp\left(2i\pi\frac{h}{2^{2k+1}}(-2^k m+2^{2k-1}m^2)\right);$$

on remarque que

$$\psi_k\neq\psi_l\qquad \text{si } h\not\equiv l \bmod 2^{k+1},$$

et que

$$\psi_h(1+2^k m)\psi_h(1+2^k n)=\exp\left(2i\pi\frac{h}{2^{k+1}}(-m-n)\right)\exp\left(2i\pi\frac{h}{4}(m^2+n^2)\right)$$
$$=\psi_h((1+2^k m)(1+2^k n)).$$

On a donc