15. *Sur le problème de Cauchy pour une classe de systèmes faiblement hyperboliques dans une classe de Gevrey*

Par Shigeo TARAMA
Section de Mathématique et Physique appliquées,
Université de Kyoto

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Feb. 12, 1980)

1. Introduction. On considère le problème de Cauchy pour les systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante. Ce problème a été déjà traité par plusieurs articles (voir p. ex. Y. Demay [1], D. Gourdin [2], V. M. Petkov [8], H. Yamahara [10]). Mais la variance de la structure de la matrice caractéristique cause la difficulté à obtenir la condition assez générale et simple pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans l'espace C^∞ (voir W. Matsumoto [4]). Dans cet article on considère ce problème dans une classe de Gevrey et on cherche la condition suffisante sous une forme simple.

2. Définitions et résultat. Soit T un nombre réel strictement positif. Soit s un nombre réel tel que $s\geq 1$. On dit que $f\in G^{(s)}$ si $f\in C^\infty([0, T]\times R^n)$ et que, pour tout sous-ensemble compact K de R^n et pour tout entier positif m, il existe une constante A telle que pour tous les multi-indices α

$$\sum_{i=0}^{m}|D_x^\alpha D_t^i f(t, x)|\leq A^{|\alpha|+1}|\alpha|!^s \qquad (t, x)\in[0, T]\times K.$$

Soit P un opérateur différential matriciel à 2 lignes, 2 colonnes, et à premier ordre:

$$P=D_t-\sum_{i=1}^{n}A_i(t, x)D_{x_i}+B(t, x)$$

où A_i et B sont les matrices carrées d'ordre 2; et on pose $D_t=-i\partial/\partial_t$ et $D_{x_k}=-i\partial/\partial_{x_k}$.

On suppose que P satisfasse aux hypothèses suivantes:

[H, 0] $\rho(\tau, \xi, t, x)=\det\left(I_2\tau-\sum_{i=1}^{n}A_i(t, x)\xi_i\right)^{*)}$ a la décomposition que voici; pour tous $(t, x, \xi)\in[0, T]\times R^n\times R^n$ $\rho(\tau, \xi, t, x)=(\tau-\lambda(t, x, \xi))^2$ où $\lambda(t, x, \xi)$ est réel.

[H, s] (où $s\geq 1$) Tous les éléments de A_i et de B appartiennent à $G^{(s)}$, et tous les éléments de A_i sont bornés sur $[0, T]\times R^n$.

On dit que le problème de Cauchy pour P est s-bien posé si et

*) I_2 est la matrice unité d'ordre 2.