

61. Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete, V.

Von Yūsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1945.)

C. Extremaleigenschaften und Verzerrungssätze.

(Fortsetzung.)¹⁾

4. Grunskyscher Verzerrungssatz.

In seiner schon in den früheren Noten²⁾ mehrmals zitierten Arbeit³⁾ hat Grunsky einen schönen genauen Verzerrungssatz über die in einem vorgegebenen endlich vielfach zusammenhängenden, den Punkt $\zeta = \infty$ enthaltenden Grundgebiete \mathfrak{B} schlichten Funktionen $f(\zeta)$ mit Normierungsbedingungen $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ angegeben, welcher lautet:

Für jede solche Funktion $f(\zeta)$ gilt die Verzerrungsungleichung

$$|\lg f'(z) - m(z)| \leq r(z) \quad (\lg f'(\infty) = 0),$$

worin nach der Grunskyschen Bezeichnung

$$m(z) = \lg \varphi'(z; z, \infty) \quad \text{und} \quad r(z) = \lg \frac{1}{\varrho(z; z, \infty)}$$

gesetzt sind. Jedem Punkte z ($z \neq \infty$) von \mathfrak{B} und jedem Extremalwerte $m(z) - r(z)e^{i\theta}$ von $\lg f'(z)$ entspricht eine bis auf additive Konstante einzige Extremalfunktion

$$f(\zeta) = j_a(\zeta; z, \infty) + f(z),$$

die [das] Grundgebiet auf die längs gewisser Bogen von logarithmischen Spiralen mit Neigung $\alpha = \tan \frac{\theta}{2}$ und dem asymptotischen Punkt $f(z)$ aufgeschlitzte Ebene ab.

Ferner, falls das Grundgebiet \mathfrak{B} einfach zusammenhängend ist, hat Grunsky gezeigt, daß, wenn insbesondere das Einheitskreisäußere als Grundgebiet gewählt wird, beide hier auftretenden Funktionen $m(z)$ und $r(z)$ explizite durch

$$m(z) = 0, \quad r(z) = \lg \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}$$

1) Fortsetzung von IV. Proc. **21** (1945), 372.

2) Alle früheren Noten finden sich unter demselben Titel in Proc. **21** (1945), I. 285, II. 296, III. 337, IV, 372.

3) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften d. math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **1** (1932-3), 95-140.