54. Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda,

Von Hirosi NAGAO.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1945.)

Das Erweiterungspreblem wurde bekanntlich zuerst von O. Schreier[1] gestellt und gelöst. Vor kurzem hat K. Shoda[2] auch einen Eaweiterungssatz aufgestellt. Er hat nämlich die Erweiterung einer Gruppe $\mathfrak{N}$ durch eine Gruppe $\mathfrak{B}$ untersucht unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ als eine durch $E=\{b_1, b_2,\ldots\}$ erzeugte freie Gruppe mit dem Relationensystem R vorgegeben ist. Die von K. Shoda dabei angegebenen Bedingungen sollen mit den Bedingungen von O. Schreier äquivalent sein, wenn man als Erzeugenden von $\mathfrak{B}$ die sämtlichen Elemente von B annimmt, was in der vorliegenden Note direkt bewiesen wird. Dadurch kann man auf dem Grund des Shodaschen Frweitrungssatzes die ganze Schreiersche Erweiterungsteorie einheitlich aufbauen.

Der Shodasche Satz lautet: Zwei Gruppen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ seien vorgegeben. $\mathfrak{B}$ sei durch ein Erzeugendensystem E und ein definierendes Relationensystem R definiert. Die aus den sämtlichen Folgerelationen von R bestehende Gruppe sai $\mathfrak{N}$. Eine homomorphe Abbildung $b\to S_b$ der durch E erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ und eine bezüglich dem Operatorberaich $\mathfrak{F}$ operatorhomomorphe Abbildung $f(b)\to A_f$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ seien bestimmt, so daß die entsprechenden Elemente in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ denselben Automorphismus von $\mathfrak{N}$ bewirken. Dann reduziert sich das freie Produkt von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ auf eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$, wenn man $b^{-1}A^{-1}bA^{S_b}$, $A_f^{-1}f$ als Relationen hinzufügt. Umgekehrt kann man auf diese Weise jede Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$ konstruieren.

Wir wenden diesen Satz auf den Fall an, daß E aus den sämtlichen Elemente aus $\mathfrak{B}$ besteht. Ordnen wir nun jedem Element b aus $\mathfrak{B}$ ein Element $\overline{b}$. E bestehe aus den $\overline{b}$. $\mathfrak{B}$ wird dann als eine durch E erzeugte freie Gruppe mit den Relationen $\overline{b_1b_2}^{-1}\overline{b_1}\,\overline{b_2}$ definiert. Ordnen wir jedem b einen Automorphismus S_b, so ist natürlich

$$(1) \qquad (A_1A_2)^{S_b}=A_1^{S_b}A_2^{S_b}, \quad A_i\in N$$

und, da das Einselement 1 von $\mathfrak{B}$ mit dem von $\mathfrak{N}$ übereinstimmt,

---

1) O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen. Monatshefte für Math. u. Physik, 34 (1926), 165–180; Hamb. Abh. 4 (1928), 321–346.

2) K. Shoda, Über die Schreiersche Erweiterungstheorie, Proc. 16 (1943), 518–519.