# 21. Sur un théoèrme de densité d'un ensemble plan de mesure positive.

Par Kinjiro KUNUGUI.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1945.)

Considérons dans le plan OXY un ensemble $E$ quelconqúe et un point $p=(x_0, y_0)$. Soit $l(\alpha)$ une demi-droite issue du point $p$, ayant la direction $\alpha$. Nous désignons par $\tau(x_0, y_0, r)$ la *mesure intérieure linéaire* de la partie commune à $E$ et au segment de $l(\alpha)$ situé entre deux extrémités $p$ et le point $(x_0+r\cos\alpha,\ y_0+r\sin\alpha)$. Nous disons que $E$ possède le point $p$ comme un *point de densité linéaire sur* $l(\alpha)$, si, $\epsilon$ étant un nombre réel positif arbitraire, il existe un nombre réel positif $r_0(\epsilon)$ tel que, pour tout nombre positif $r$ inférieur à $r_0(\epsilon)$, on ait

$$\frac{\tau(x_0,\ y_0,\ r)}{r}>1-e$$

Enfin, nous dirons que le point $p$ possède la "*propriété A*", s'il existe un ensemble de directions $D(p)$ de mesuae $O$ (qui dépend du point $p$), tel que les directions hors de $D(p)$, contiennent les points de $E$ d'une telle quantité que $p$ soit un point de densité linéaire sur ces dimi-droites. Or, Prof. M. Tsuji a posé récemment le problème suivant: étant donné un ensemble plan mesurable dont la mesure est positive, presque tout point de cet ensemble jouit-il de la propriété A? Le but de cette Note est d'y donner une solution affirmative, c. a d. nous allons démontrer le

Théorème. *Soit M un ensemble situé dans le plan OXY, qui est mesurable au sens de M. Lebesgue et dont la mesure est positive. Alors, il existe un sous-ensemble N de M, de mesure O, tell que tout point de $M-N$ jouit de la propriété A.*

Démonstration. Supposons, par impossible, qu'il existe un ensemble plan $M$ mesurable au sens de Lebesgue, contenant un sons-ensemble $N$ de mesure exterieure positive tel que, pour tout point $p$ de $N$, il existe un ensemble $D(p)$ de de directions, de mesure extérieure positive et jouissant de la propriété: la demi-droite $l(\alpha)$ à la direction $\alpha$ appartenant à $D(p)$, issues de $p$, possède des points de $M$ de telle manière que $p$ ne soit pas un point de densité linéaire de l'ensemble $M\,l(\alpha)$. Nous pouvons supposer que $N$ est l'ensemble de tous les points de $M$

1) La direction d'une demi-droite est l'angle de la demi-droite que fait celle-ci avec l'axe OX.