20. Zur Axiomatik der ganzen und der reellen Zahlen.

Von Teiji TAKAGI, M. I. A.

(Comm. March 12, 1945.)

I. Ganze Zahlen.

Das System der ganzen Zahlen laesst sich auf Grund der folgenden Axiome einfuehren. Indem wir uns in dieser summarischen Mitteilung Einfachheitshalber der Sprache der Mengenlehre (Klassen-lehre) bedienen, bezeichnen wir mit N die Menge der ganzen Zahlen.

Axiom 1. N lasst sich eine (nicht identische) ein-eindeutige Abbildung in sich zu: $x \rightleftarrows \varphi(x)$, wobei x sowie $\varphi(x)$ die saemtlichen Elemente von N durchlaufen.

Wir schreiben x^+ bez. x^- für $\varphi(x)$ bez. $\varphi^{-1}(x)$, und wenn $M \subset N$, $M^\pm$ für die Menge $\{x^\pm;\ x \in M\}$, also beispielsweise $N = N^+ = N^-$.

Axion 2. N ist minimum ihrer Art oder irreduzibel, d.h. wenn $M \subset N$ und $M = M^+$ (folglich auch $M = M^-$) *so fällt M mit N zusammen. (Prinzip der mathematischen Induktion.)*

Zusatz. Für jedes Element von N gilt $a \neq a^+$. Wäre $a = a^+$, so gelte für $M = N - a < N$, $M = M,^+$ in Widerpruch mit Axiome 2.

Eine Untermenge M von N, die mit x zugleich auch x^+(bez. x^-), enthält, heisse eine Progression (bez. Regression).

Satz. 1. Vereinigung und Durchschnitt von Progressionen sind wieder Progressionen; mit M sind $M^\pm$ Progressionen. Ebenso für die Regressionen.

Die Durchschnitt aller Progressionen, bez. Regressionen, die das Element a enthalten, sei mit $K(a)$ bez. $L(a)$ bezeichnet.

Satz 2. $K(a)^\pm = K(a^\pm)$. $L(a)^\pm = L(a^\pm)$.

$K(a)^+$ ist eine Progression, die a^+ enthält, folglich $\supset K(a^+)$. $K(a^+)^-$ ist eine Progression, die a enthält, folglich $\supset K(a)$. Daher $K(a^+) \supset K(a)^+$. Also $K(a)^+ = K(a^+)$. Ebenso für $K(a^-)$. Dual (φ^{-1} statt (φ)) für $L(a)$.

Satz 3. $K(a) = \vee(a, K(a^+))$, $L(a) = \vee(a, L(a^-))$.

Die rechte Seite ist eine Progression, die a enthält, folglich $\supset K(a)$. Anderseits ist $K(a) - a$ eine Progression, die a^+ enthält, folglich $\supset K(a^+)$, daher $K(a) \supset \vee(a, K(a^+))$. Also $K(a) = \vee(a, K(a^+))$. Dual für $L(a)$.

Satz 4. $N = \vee(K(a), L(a^-))$.

M sei die rechte Seite. Dann ist $M^+ = \vee(K(a)^+, L(a^-)^+) = \vee(K(a^+), L(a)) = \vee(K(a^+), a, L(a^-)) = \vee(K(a), L(a^-)) = M$. Folglich $M = N$.